

Вариант 0.

1. В параллелепипеде $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ $\overline{AB} = \mathbf{a}$, $\overline{AD} = \mathbf{b}$, $\overline{AA_1} = \mathbf{c}$. Выразить через \mathbf{a} , \mathbf{b} , \mathbf{c} вектор $\mathbf{q} = \overline{KM}$, где K – середина ребра CC_1 , а M делит ребро AD в отношении 1 : 2.
2. Доказать, что векторы $\mathbf{a}(1; 0; -3)$, $\mathbf{b}(2; 3; -1)$, $\mathbf{c}(3; 4; -3)$ образуют базис. Разложить вектор $\mathbf{d}(1; 7; 8)$ по этим векторам.
3. Найти косинус угла между векторами $\mathbf{a} = 2\mathbf{m} + 2\mathbf{n}$ и $\mathbf{b} = -4\mathbf{m} - 6\mathbf{n}$ при $|\mathbf{m}| = \sqrt{3}$, $|\mathbf{n}| = 2$, $(\widehat{\mathbf{m}, \mathbf{n}}) = \frac{5\pi}{6}$.
4. Найти $\text{pr}_{\mathbf{y}} \mathbf{x}$, при $\mathbf{x} = \mathbf{a} + 2\mathbf{c}$ и $\mathbf{y} = \mathbf{b}$, где $\mathbf{a}(-8; -2; -3)$, $\mathbf{b}(3; -2; -1)$, $\mathbf{c}(2; -1; 1)$.
5. Найти координаты единичного вектора \mathbf{n}_0 , перпендикулярного плоскости $\triangle ABC$, где $A(9; 0; 5)$, $B(12; 9; 6)$, $C(8; -4; 5)$.
6. Вычислить площадь треугольника, построенного на векторах $\mathbf{a} = -4\mathbf{m} - 2\mathbf{n}$ и $\mathbf{b} = -3\mathbf{m} - 4\mathbf{n}$ при $|\mathbf{m}| = 5$, $|\mathbf{n}| = 3$, $(\widehat{\mathbf{m}, \mathbf{n}}) = \frac{\pi}{4}$.
7. Компланарны ли векторы $\mathbf{a}(10; -9; -1)$, $\mathbf{b}(5; -4; -1)$, $\mathbf{c}(9; -8; -1)$?
8. Вычислить объем тетраэдра с вершинами в точках A, B, C, D , площадь грани BCD и высоту, опущенную на эту грань из вершины A . $A(-1; 5; -2)$, $B(-4; 8; -3)$, $C(-5; 16; -12)$, $D(-5; 10; -4)$.
9. Найти косинус острого угла между плоскостями $\alpha : x + 2y + z = -10$ и $\beta : 3y - 4z + 14 = 0$.
10. Задана пирамида $SABC$ координатами вершин $A(3; 5; 0)$, $B(12; 4; -4)$, $C(13; 4; -5)$, $S(-7; -6; 5)$:
а) составить уравнение плоскости ABC ,
б) найти расстояние от вершины S до плоскости ABC .
11. Составить уравнение плоскости π , проходящей через точку $M(1; -7; 3)$ параллельно прямым $\frac{x-6}{-1} = \frac{y+1}{1} = \frac{z-2}{0}$ и $\frac{x+4}{-10} = \frac{y+3}{1} = \frac{z+6}{1}$.
12. Составить уравнение прямой AB и найти расстояние от точки C до этой прямой, если $A(1; 3; 4)$, $B(-4; 4; -2)$, $C(-5; 4; -3)$.
13. Привести к каноническому виду общие уравнения прямой
$$\begin{cases} x + 5y + 11 = 0 \\ x - 3y + z - 9 = 0 \end{cases}.$$
14. Найти проекцию точки $M(-11; 13; -23)$ на плоскость $-9x + 8y - 10z + 57 = 0$.
15. Найти угол между прямой $l : \frac{x+7}{-1} = \frac{y+8}{1} = \frac{z}{2}$ и плоскостью $\pi : 3x + 2y - z = 0$.

Вариант 1.

1. В параллелепипеде $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ $\overline{AB} = \mathbf{a}$, $\overline{AD} = \mathbf{b}$, $\overline{AA_1} = \mathbf{c}$. Выразить через \mathbf{a} , \mathbf{b} , \mathbf{c} вектор $\mathbf{q} = \overline{KM}$, где K – середина ребра AD , а M делит ребро $A_1 B_1$ в отношении 3 : 1.
2. Доказать, что векторы $\mathbf{a}(5; 4; -1)$, $\mathbf{b}(-3; -1; -2)$, $\mathbf{c}(4; 3; 0)$ образуют базис. Разложить вектор $\mathbf{d}(5; -1; 10)$ по этим векторам.
3. Найти косинус угла между векторами $\mathbf{a} = -2\mathbf{m} - 2\mathbf{n}$ и $\mathbf{b} = \mathbf{m} + 2\mathbf{n}$ при $|\mathbf{m}| = 2\sqrt{3}$, $|\mathbf{n}| = 1$, $(\widehat{\mathbf{m}, \mathbf{n}}) = \frac{5\pi}{6}$.
4. Найти $\text{pr}_{\mathbf{y}} \mathbf{x}$, при $\mathbf{x} = \mathbf{b}$ и $\mathbf{y} = 2\mathbf{a} + 2\mathbf{c}$, где $\mathbf{a}(1; 0; -4)$, $\mathbf{b}(-1; 1; -1)$, $\mathbf{c}(-2; 1; 2)$.
5. Найти координаты единичного вектора \mathbf{n}_0 , перпендикулярного плоскости $\triangle ABC$, где $A(7; 7; 1)$, $B(10; 8; 1)$, $C(0; 5; 2)$.
6. Вычислить площадь треугольника, построенного на векторах $\mathbf{a} = -\mathbf{m} - 2\mathbf{n}$ и $\mathbf{b} = 2\mathbf{m} - 4\mathbf{n}$ при $|\mathbf{m}| = 1$, $|\mathbf{n}| = 4$, $(\widehat{\mathbf{m}, \mathbf{n}}) = \frac{5\pi}{6}$.
7. Компланарны ли векторы \overline{AB} , \overline{AC} , \overline{AD} , где $A(2; 8; 8)$, $B(4; 11; 13)$, $C(1; 5; 4)$, $D(1; 4; 3)$?
8. Вычислить объем тетраэдра с вершинами в точках A, B, C, D , площадь грани ABD и высоту, опущенную на эту грань из вершины C . $A(-4; -9; -7)$, $B(-7; -3; -12)$, $C(-3; -7; -6)$, $D(-6; -16; -10)$.
9. Найти косинус острого угла между плоскостями $\alpha : -8x + 3y - 4z = 10$ и $\beta : x + z + 7 = 0$.
10. Составить уравнение плоскости, проходящей через точки $A(9; -1; 8)$, $B(10; -8; 8)$, $C(11; -5; 9)$, и найти расстояние от точки $S(0; 3; 2)$ до этой плоскости.
11. Составить уравнение плоскости π , проходящей через точку $M(10; -2; -6)$ параллельно прямой $\frac{x+5}{1} = \frac{y+1}{-2} = \frac{z+3}{-1}$ и $\frac{x+1}{-2} = \frac{y-1}{-3} = \frac{z-5}{-2}$.
12. Составить уравнение прямой AB и найти расстояние от точки C до этой прямой, если $A(4; 8; 3)$, $B(7; 4; 13)$, $C(2; 11; -4)$.
13. Привести к каноническому виду общие уравнения прямой
$$\begin{cases} x + 7y - 29 = 0 \\ x + 4y + z - 22 = 0 \end{cases}.$$
14. Найти координаты точки M_1 , симметричной точке $M(-10; 18; -12)$ относительно плоскости $5x - 7y + 4z - 1 = 0$.
15. Найти угол между прямой $l : \frac{x-5}{-1} = \frac{y}{2} = \frac{z-7}{-2}$ и плоскостью $\pi : -3x - y + 2z = -10$.

Вариант 2.

1. В параллелепипеде $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ $\overline{AB} = \mathbf{a}$, $\overline{AD} = \mathbf{b}$, $\overline{AA_1} = \mathbf{c}$. Выразить через \mathbf{a} , \mathbf{b} , \mathbf{c} вектор $\mathbf{q} = \overline{KM}$, где K – середина ребра DC , а M делит ребро $B_1 C_1$ в отношении 2 : 3.
2. Доказать, что векторы $\mathbf{a}(5; -3; 3)$, $\mathbf{b}(-2; -2; -3)$, $\mathbf{c}(3; -1; 2)$ образуют базис. Разложить вектор $\mathbf{d}(7; -5; 4)$ по этим векторам.
3. Найти косинус угла между векторами $\mathbf{a} = \mathbf{m} + \mathbf{n}$ и $\mathbf{b} = 2\mathbf{m} + 8\mathbf{n}$ при $|\mathbf{m}| = 2$, $|\mathbf{n}| = 1$, $(\widehat{\mathbf{m}, \mathbf{n}}) = \frac{2\pi}{3}$.
4. Найти $\text{pr}_{\mathbf{y}} \mathbf{x}$, при $\mathbf{x} = \mathbf{b}$ и $\mathbf{y} = 8\mathbf{a} + \mathbf{c}$, где $\mathbf{a}(0; -1; -1)$, $\mathbf{b}(2; 4; 3)$, $\mathbf{c}(2; 3; 3)$.
5. Найти координаты единичного вектора \mathbf{n}_0 , перпендикулярного плоскости $\triangle ABC$, где $A(5; 8; 7)$, $B(12; 11; 11)$, $C(9; 10; 10)$.
6. Вычислить площадь треугольника, построенного на векторах $\mathbf{a} = -4\mathbf{m} - 3\mathbf{n}$ и $\mathbf{b} = \mathbf{m} - 2\mathbf{n}$ при $|\mathbf{m}| = 5$, $|\mathbf{n}| = 5$, $(\widehat{\mathbf{m}, \mathbf{n}}) = \frac{3\pi}{4}$.
7. Лежат ли точки $A(4; 2; 5)$, $B(3; 1; 8)$, $C(3; -2; 14)$, $D(4; 3; 3)$ в одной плоскости?
8. Вычислить объем параллелепипеда $A_1 A_2 A_3 A_4 B_1 B_2 B_3 B_4$, площадь грани $A_1 A_2 A_3 A_4$ и высоту, опущенную на эту грань из вершины B_1 . $A_1(1; 9; 5)$, $A_2(3; 12; 6)$, $A_4(-2; 1; 3)$, $B_1(-2; 7; 3)$.
9. Найти косинус острого угла между плоскостями $\alpha : -4x + 6y + 5z = 7$ и $\beta : y + z + 2 = 0$.
10. Задана пирамида $SABC$ координатами вершин $A(6; -5; -9)$, $B(7; -7; -10)$, $C(8; -2; -8)$, $S(8; 1; 6)$:
 а) составить уравнение плоскости ABC ,
 б) найти расстояние от вершины S до плоскости ABC .
11. Составить уравнение плоскости π , проходящей через точку $M(-5; -4; -9)$ параллельно прямой $\frac{x+5}{-2} = \frac{y-2}{1} = \frac{z-1}{0}$ и перпендикулярно плоскости $3x + y + z = 5$.
12. Составить уравнение прямой AB и найти расстояние от точки C до этой прямой, если $A(0; 4; 0)$, $B(-1; 7; 1)$, $C(1; 0; -2)$.
13. Привести к каноническому виду общие уравнения прямой

$$\begin{cases} 5x + y + 5 = 0 \\ -8x - y + z + 7 = 0 \end{cases}.$$
14. Найти проекцию точки $M(5; 21; -9)$ на плоскость $-x + 7y - z = 49$.
15. Найти угол между прямой $l : \frac{x}{-5} = \frac{y+2}{-3} = \frac{z-7}{1}$ и плоскостью $\pi : -x + y - z = -8$.

Вариант 3.

1. В параллелепипеде $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ $\overline{AB} = \mathbf{a}$, $\overline{AD} = \mathbf{b}$, $\overline{AA_1} = \mathbf{c}$. Выразить через \mathbf{a} , \mathbf{b} , \mathbf{c} вектор $\mathbf{q} = \overline{KM}$, где K – середина ребра BB_1 , а M делит ребро AD в отношении 1 : 2.
2. Доказать, что векторы $\mathbf{a}(1; -2; -4)$, $\mathbf{b}(2; -3; -4)$, $\mathbf{c}(2; -1; 3)$ образуют базис. Разложить вектор $\mathbf{d}(-6; 5; -2)$ по этим векторам.
3. Найти косинус угла между векторами $\mathbf{a} = \mathbf{m} + \mathbf{n}$ и $\mathbf{b} = -\mathbf{m} - 2\mathbf{n}$ при $|\mathbf{m}| = 2$, $|\mathbf{n}| = \sqrt{3}$, $(\widehat{\mathbf{m}, \mathbf{n}}) = \frac{5\pi}{6}$.
4. Найти $\text{pr}_{\mathbf{y}} \mathbf{x}$, при $\mathbf{x} = \mathbf{b}$ и $\mathbf{y} = \mathbf{a} + \mathbf{c}$, где $\mathbf{a}(1; 2; 2)$, $\mathbf{b}(-2; -1; 7)$, $\mathbf{c}(5; -2; -2)$.
5. Найти координаты единичного вектора \mathbf{n}_0 , перпендикулярного плоскости $\triangle ABC$, где $A(0; 6; 3)$, $B(-5; 7; 4)$, $C(-3; 7; 5)$.
6. Вычислить площадь параллелограмма, построенного на векторах $\mathbf{a} = \mathbf{m} - 3\mathbf{n}$ и $\mathbf{b} = \mathbf{m} + \mathbf{n}$ при $|\mathbf{m}| = 5$, $|\mathbf{n}| = 5$, $(\widehat{\mathbf{m}, \mathbf{n}}) = \frac{\pi}{6}$.
7. Лежат ли точки $A(5; 3; 9)$, $B(8; 5; 10)$, $C(11; 8; 10)$, $D(13; 10; 10)$ в одной плоскости?
8. Вычислить объем параллелепипеда $A_1 A_2 A_3 A_4 B_1 B_2 B_3 B_4$, площадь грани $A_1 A_2 A_3 A_4$ и высоту, опущенную на эту грань из вершины B_1 . $A_1(7; -6; 1)$, $A_2(14; -8; 3)$, $A_4(5; -5; -3)$, $B_1(5; -6; 6)$.
9. Найти косинус острого угла между плоскостями $\alpha : -x + y - 14 = 0$ и $\beta : 4x + 2y - 6z = 4$.
10. Составить уравнение плоскости, проходящей через точки $A(2; 5; -2)$, $B(11; 6; -2)$, $C(10; 7; -1)$, и найти расстояние от точки $S(-3; -5; 0)$ до этой плоскости.
11. Составить уравнение плоскости π , проходящей через точку $M(5; 6; 9)$ параллельно прямым $\frac{x-3}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z}{0}$ и $\frac{x+2}{1} = \frac{y+7}{-4} = \frac{z-3}{1}$.
12. Составить уравнение прямой AB и найти расстояние от точки C до этой прямой, если $A(2; 3; 7)$, $B(5; 1; 8)$, $C(4; 2; 7)$.
13. Привести к каноническому виду общие уравнения прямой
$$\begin{cases} -x + y - z + 3 = 0 \\ 3x - 4y + 9z - 9 = 0 \end{cases}.$$
14. Найти проекцию точки $M(10; 16; -13)$ на плоскость $-4x - 3y + 4z + 17 = 0$.
15. Найти угол между прямой $l : \frac{x-3}{-1} = \frac{y-1}{-2} = \frac{z}{2}$ и плоскостью $\pi : 3x - 2y - z = -2$.

Вариант 4.

1. В параллелепипеде $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ $\overline{AB} = \mathbf{a}$, $\overline{AD} = \mathbf{b}$, $\overline{AA_1} = \mathbf{c}$. Выразить через \mathbf{a} , \mathbf{b} , \mathbf{c} вектор $\mathbf{q} = \overline{KM}$, где K – середина ребра $D_1 C_1$, а M делит ребро BC в отношении 2 : 3.
2. Доказать, что векторы $\mathbf{a}(3; -3; 2)$, $\mathbf{b}(2; 1; -1)$, $\mathbf{c}(-2; 5; -3)$ образуют базис. Разложить вектор $\mathbf{d}(0; 6; -4)$ по этим векторам.
3. Найти косинус угла между векторами $\mathbf{a} = 2\mathbf{m} - \mathbf{n}$ и $\mathbf{b} = 5\mathbf{m} - 4\mathbf{n}$ при $|\mathbf{m}| = 2$, $|\mathbf{n}| = \sqrt{3}$, $(\widehat{\mathbf{m}, \mathbf{n}}) = \frac{\pi}{6}$.
4. Найти $\text{pr}_{\mathbf{y}} \mathbf{x}$, при $\mathbf{x} = 2\mathbf{b} + 3\mathbf{c}$ и $\mathbf{y} = \mathbf{a}$, где $\mathbf{a}(-1; 4; 2)$, $\mathbf{b}(-1; -7; -4)$, $\mathbf{c}(-1; 6; 3)$.
5. Найти координаты единичного вектора \mathbf{n}_0 , перпендикулярного плоскости $\triangle ABC$, где $A(9; 8; 6)$, $B(10; 12; 6)$, $C(7; 5; 7)$.
6. Вычислить площадь треугольника, построенного на векторах $\mathbf{a} = \mathbf{m} + 3\mathbf{n}$ и $\mathbf{b} = -2\mathbf{m} + \mathbf{n}$ при $|\mathbf{m}| = 2$, $|\mathbf{n}| = 3$, $(\widehat{\mathbf{m}, \mathbf{n}}) = \frac{3\pi}{4}$.
7. Компланарны ли векторы \overline{AB} , \overline{AC} , \overline{AD} , где $A(9; 2; 7)$, $B(13; 7; 13)$, $C(8; 1; 6)$, $D(13; 3; 5)$?
8. Вычислить объем тетраэдра с вершинами в точках P, Q, R, S , площадь грани QRS и высоту, опущенную на эту грань из вершины P . $P(1; 4; 8)$, $Q(-6; 6; 6)$, $R(1; 3; 8)$, $S(-15; 10; 3)$.
9. Найти косинус острого угла между плоскостями $\alpha : y + z - 15 = 0$ и $\beta : -4x + 4y + 3z = -2$.
10. Составить уравнение плоскости, проходящей через точки $A(1; 1; 9)$, $B(-8; 8; 12)$, $C(-3; 3; 10)$, и найти расстояние от точки $S(7; -6; 1)$ до этой плоскости.
11. Составить канонические уравнения прямой, проходящей через точку $M(-1; 4; -10)$ параллельно плоскости $-x - 2y - z = 1$ и перпендикулярно прямой $\frac{x+1}{2} = \frac{y+5}{3} = \frac{z+7}{4}$.
12. Составить уравнение прямой AB и найти расстояние от точки C до этой прямой, если $A(7; 9; 2)$, $B(6; 6; 7)$, $C(8; 11; -2)$.
13. Привести к каноническому виду общие уравнения прямой
$$\begin{cases} -4x + y - 28 = 0 \\ 5x + y + z + 30 = 0 \end{cases}.$$
14. Найти координаты точки M_1 , симметричной точке $M(3; 4; 8)$ относительно плоскости $-4x - 3y - 3z = 3$.
15. Найти угол между прямой $l : \frac{x+8}{1} = \frac{y+1}{1} = \frac{z+2}{-2}$ и плоскостью $\pi : -x + 4y + 2z + 1 = 0$.

Вариант 5.

1. В параллелепипеде $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ $\overline{AB} = \mathbf{a}$, $\overline{AD} = \mathbf{b}$, $\overline{AA_1} = \mathbf{c}$. Выразить через \mathbf{a} , \mathbf{b} , \mathbf{c} вектор $\mathbf{q} = \overline{KM}$, где K – середина ребра AD , а M делит ребро BB_1 в отношении 3 : 1.
2. Доказать, что векторы $\mathbf{a}(-1; -2; -3)$, $\mathbf{b}(-1; -1; -2)$, $\mathbf{c}(-3; -4; -5)$ образуют базис. Разложить вектор $\mathbf{d}(-1; -4; -3)$ по этим векторам.
3. Найти косинус угла между векторами $\mathbf{a} = -2\mathbf{m} - 4\mathbf{n}$ и $\mathbf{b} = 2\mathbf{m} + \mathbf{n}$ при $|\mathbf{m}| = \sqrt{2}$, $|\mathbf{n}| = 2$, $(\widehat{\mathbf{m}, \mathbf{n}}) = \frac{3\pi}{4}$.
4. Найти $\text{pr}_{\mathbf{y}} \mathbf{x}$, при $\mathbf{x} = \mathbf{a}$ и $\mathbf{y} = \mathbf{b} + 2\mathbf{c}$, где $\mathbf{a}(-2; -5; -3)$, $\mathbf{b}(-3; -6; -11)$, $\mathbf{c}(3; 6; 4)$.
5. Найти координаты единичного вектора \mathbf{n}_0 , перпендикулярного плоскости $\triangle ABC$, где $A(9; 2; 2)$, $B(4; 4; 7)$, $C(12; 1; 0)$.
6. Вычислить площадь треугольника, построенного на векторах $\mathbf{a} = \mathbf{m} + \mathbf{n}$ и $\mathbf{b} = 4\mathbf{m} + 3\mathbf{n}$ при $|\mathbf{m}| = 4$, $|\mathbf{n}| = 5$, $(\widehat{\mathbf{m}, \mathbf{n}}) = \frac{\pi}{6}$.
7. Компланарны ли векторы $\mathbf{a}(1; -6; 7)$, $\mathbf{b}(0; 1; -1)$, $\mathbf{c}(-1; 8; -9)$?
8. Вычислить объем параллелепипеда $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$, площадь грани $ABCD$ и высоту, опущенную на эту грань из вершины A_1 . $A(-3; 5; 0)$, $B(-3; 7; 1)$, $D(-1; 8; 2)$, $A_1(-2; 1; -2)$.
9. Найти косинус острого угла между плоскостями $\alpha : 5x + 3y + 8z = -9$ и $\beta : x + y - 1 = 0$.
10. Задана пирамида $SABC$ координатами вершин $A(7; -9; 3)$, $B(5; -8; 2)$, $C(8; -8; 3)$, $S(-6; 4; 6)$:
а) составить уравнение плоскости ABC ,
б) найти расстояние от вершины S до плоскости ABC .
11. Составить уравнение плоскости π , проходящей через точку $M(-8; -3; -4)$ параллельно прямым $\frac{x+2}{1} = \frac{y}{-7} = \frac{z+5}{4}$ и $\frac{x-6}{-1} = \frac{y-1}{4} = \frac{z-1}{-3}$.
12. Составить уравнение прямой AB и найти расстояние от точки C до этой прямой, если $A(3; 0; 7)$, $B(6; -5; -1)$, $C(2; 2; 10)$.
13. Привести к каноническому виду общие уравнения прямой

$$\begin{cases} 2x + y - 9 = 0 \\ -9x - y + z + 10 = 0 \end{cases}.$$
14. Найти проекцию точки $M(-2; 27; -2)$ на плоскость $6x - 9y + 2z = -17$.
15. Найти угол между прямой $l : \frac{x+3}{1} = \frac{y+7}{1} = \frac{z+1}{4}$ и плоскостью $\pi : x - y - 3z = -5$.

Вариант 6.

1. В параллелепипеде $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ $\overline{AB} = \mathbf{a}$, $\overline{AD} = \mathbf{b}$, $\overline{AA_1} = \mathbf{c}$. Выразить через \mathbf{a} , \mathbf{b} , \mathbf{c} вектор $\mathbf{q} = \overline{KM}$, где K – середина ребра AA_1 , а M делит ребро BC в отношении 1 : 2.
2. Доказать, что векторы $\mathbf{a}(3; 0; -2)$, $\mathbf{b}(-2; -5; -3)$, $\mathbf{c}(6; -1; -5)$ образуют базис. Разложить вектор $\mathbf{d}(4; -4; -6)$ по этим векторам.
3. Найти косинус угла между векторами $\mathbf{a} = \mathbf{m} + 2\mathbf{n}$ и $\mathbf{b} = -3\mathbf{m} - 5\mathbf{n}$ при $|\mathbf{m}| = 2$, $|\mathbf{n}| = \sqrt{3}$, $(\widehat{\mathbf{m}, \mathbf{n}}) = \frac{5\pi}{6}$.
4. Найти $\text{pr}_{\mathbf{y}} \mathbf{x}$, при $\mathbf{x} = \mathbf{b}$ и $\mathbf{y} = 3\mathbf{a} + 2\mathbf{c}$, где $\mathbf{a}(-1; 2; -3)$, $\mathbf{b}(1; -3; 2)$, $\mathbf{c}(3; -3; 5)$.
5. Найти координаты единичного вектора \mathbf{n}_0 , перпендикулярного плоскости $\triangle ABC$, где $A(4; 6; 6)$, $B(6; 2; 7)$, $C(3; 13; 6)$.
6. Вычислить площадь треугольника, построенного на векторах $\mathbf{a} = -3\mathbf{m} - 3\mathbf{n}$ и $\mathbf{b} = -2\mathbf{m} + 2\mathbf{n}$ при $|\mathbf{m}| = 1$, $|\mathbf{n}| = 2$, $(\widehat{\mathbf{m}, \mathbf{n}}) = \frac{\pi}{3}$.
7. Компланарны ли векторы \overline{AB} , \overline{AC} , \overline{AD} , где $A(4; 8; 1)$, $B(6; 9; 6)$, $C(5; 9; 4)$, $D(4; 7; 0)$?
8. Вычислить объем тетраэдра с вершинами в точках A_1, A_2, A_3, A_4 , площадь грани $A_1 A_3 A_4$ и высоту, опущенную на эту грань из вершины A_2 . $A_1(-3; -5; 0)$, $A_2(-8; -7; -1)$, $A_3(3; -3; -3)$, $A_4(-1; -4; 4)$.
9. Найти косинус острого угла между плоскостями $\alpha : x - 2z + 1 = 0$ и $\beta : x + 2y - 5z = 10$.
10. Составить уравнение плоскости, проходящей через точки $A(7; -2; -10)$, $B(9; -1; -9)$, $C(10; 2; -8)$, и найти расстояние от точки $S(-1; -3; -4)$ до этой плоскости.
11. Составить уравнение плоскости π , проходящей через точку $M(-3; -7; 2)$ перпендикулярно плоскостям $-2x - y + 2z = 4$ и $-x - 2y + 3z = 5$.
12. Составить уравнение прямой AB и найти расстояние от точки C до этой прямой, если $A(6; 6; 6)$, $B(5; 8; 5)$, $C(5; 7; 6)$.
13. Привести к каноническому виду общие уравнения прямой
$$\begin{cases} x - 7y - 2 = 0 \\ -x + y + z - 4 = 0 \end{cases}.$$
14. Найти проекцию точки $M(8; -3; 7)$ на плоскость $3x + 3y + z + 16 = 0$.
15. Найти угол между прямой $l : \frac{x-1}{-4} = \frac{y-3}{-1} = \frac{z-6}{2}$ и плоскостью $\pi : x - y + 2z = -9$.

Вариант 7.

1. В параллелепипеде $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ $\overline{AB} = \mathbf{a}$, $\overline{AD} = \mathbf{b}$, $\overline{AA_1} = \mathbf{c}$. Выразить через \mathbf{a} , \mathbf{b} , \mathbf{c} вектор $\mathbf{q} = \overline{KM}$, где K – середина ребра AD , а M делит ребро $A_1 B_1$ в отношении 2 : 1.
2. Доказать, что векторы $\mathbf{a}(2; 3; -1)$, $\mathbf{b}(-5; -4; 5)$, $\mathbf{c}(-2; -1; 2)$ образуют базис. Разложить вектор $\mathbf{d}(6; -1; -8)$ по этим векторам.
3. Найти косинус угла между векторами $\mathbf{a} = -6\mathbf{m} + 5\mathbf{n}$ и $\mathbf{b} = -\mathbf{m} + 2\mathbf{n}$ при $|\mathbf{m}| = \sqrt{3}$, $|\mathbf{n}| = 2$, $(\widehat{\mathbf{m}, \mathbf{n}}) = \frac{\pi}{6}$.
4. Найти $\text{pr}_{\mathbf{y}} \mathbf{x}$, при $\mathbf{x} = \mathbf{b}$ и $\mathbf{y} = \mathbf{a} + 2\mathbf{c}$, где $\mathbf{a}(-3; 7; -5)$, $\mathbf{b}(-2; 1; -2)$, $\mathbf{c}(-1; -2; 5)$.
5. Найти координаты единичного вектора \mathbf{n}_0 , перпендикулярного плоскости $\triangle ABC$, где $A(3; 3; 8)$, $B(6; 5; 9)$, $C(11; 6; 10)$.
6. Вычислить площадь параллелограмма, построенного на векторах $\mathbf{a} = -3\mathbf{m} + 3\mathbf{n}$ и $\mathbf{b} = \mathbf{m} - 2\mathbf{n}$ при $|\mathbf{m}| = 4$, $|\mathbf{n}| = 1$, $(\widehat{\mathbf{m}, \mathbf{n}}) = \frac{\pi}{3}$.
7. Лежат ли точки $A(2; 6; 8)$, $B(7; 3; 6)$, $C(7; 4; 5)$, $D(-2; 7; 11)$ в одной плоскости?
8. Вычислить объем тетраэдра с вершинами в точках P, Q, R, S , площадь грани QRS и высоту, опущенную на эту грань из вершины P . $P(3; -9; -7)$, $Q(3; -6; -8)$, $R(-5; -16; -15)$, $S(4; -10; -5)$.
9. Найти косинус острого угла между плоскостями $\alpha : 2x + y - 6 = 0$ и $\beta : -x - 2y + 3z = 11$.
10. Составить уравнение плоскости, проходящей через точки $A(1; 8; -10)$, $B(2; 9; -10)$, $C(-7; 10; -9)$, и найти расстояние от точки $S(0; 7; 3)$ до этой плоскости.
11. Составить уравнение плоскости π , проходящей через точку $M(-3; 0; 4)$ параллельно прямым $\frac{x+3}{-1} = \frac{y+6}{-2} = \frac{z-4}{-4}$ и $\frac{x-6}{1} = \frac{y+5}{1} = \frac{z+4}{1}$.
12. Составить уравнение прямой AB и найти расстояние от точки C до этой прямой, если $A(8; 0; 9)$, $B(13; -4; 10)$, $C(12; -3; 10)$.
13. Привести к каноническому виду общие уравнения прямой
$$\begin{cases} x + 5y - 1 = 0 \\ -x - 2y + z = 0 \end{cases}.$$
14. Найти проекцию точки $M(11; 26; -18)$ на плоскость $-9x - 10y + 6z = -33$.
15. Найти угол между прямой $l : \frac{x}{5} = \frac{y+2}{1} = \frac{z-8}{-2}$ и плоскостью $\pi : -x + 2y + z = -9$.

Вариант 8.

1. В параллелепипеде $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ $\overline{AB} = \mathbf{a}$, $\overline{AD} = \mathbf{b}$, $\overline{AA_1} = \mathbf{c}$. Выразить через \mathbf{a} , \mathbf{b} , \mathbf{c} вектор $\mathbf{q} = \overline{KM}$, где K – середина ребра $A_1 B_1$, а M делит ребро DD_1 в отношении 3 : 2.
2. Доказать, что векторы $\mathbf{a}(-5; 1; 2)$, $\mathbf{b}(-5; 2; 3)$, $\mathbf{c}(-6; 1; 1)$ образуют базис. Разложить вектор $\mathbf{d}(3; 2; 5)$ по этим векторам.
3. Найти косинус угла между векторами $\mathbf{a} = \mathbf{m} - \mathbf{n}$ и $\mathbf{b} = 4\mathbf{m} - 5\mathbf{n}$ при $|\mathbf{m}| = 2\sqrt{3}$, $|\mathbf{n}| = 3$, $(\widehat{\mathbf{m}, \mathbf{n}}) = \frac{\pi}{6}$.
4. Найти $\text{pr}_{\mathbf{y}} \mathbf{x}$, при $\mathbf{x} = 2\mathbf{b} + \mathbf{c}$ и $\mathbf{y} = \mathbf{a}$, где $\mathbf{a}(2; 2; 1)$, $\mathbf{b}(3; 2; 3)$, $\mathbf{c}(-7; -2; -7)$.
5. Найти координаты единичного вектора \mathbf{n}_0 , перпендикулярного плоскости $\triangle ABC$, где $A(5; 1; 6)$, $B(6; -1; 6)$, $C(6; 0; 7)$.
6. Вычислить площадь треугольника, построенного на векторах $\mathbf{a} = -3\mathbf{m} - \mathbf{n}$ и $\mathbf{b} = 2\mathbf{m} - 2\mathbf{n}$ при $|\mathbf{m}| = 4$, $|\mathbf{n}| = 3$, $(\widehat{\mathbf{m}, \mathbf{n}}) = \frac{\pi}{3}$.
7. Лежат ли точки $A(3; 2; 5)$, $B(2; 1; 6)$, $C(4; 2; 3)$, $D(3; 1; 4)$ в одной плоскости?
8. Вычислить объем тетраэдра с вершинами в точках A_1, A_2, A_3, A_4 , площадь грани $A_1 A_2 A_4$ и высоту, опущенную на эту грань из вершины A_3 . $A_1(4; 8; -9)$, $A_2(2; 14; -6)$, $A_3(3; 13; -7)$, $A_4(2; 9; -8)$.
9. Найти косинус острого угла между плоскостями $\alpha : -y - 2z - 8 = 0$ и $\beta : -x + 3y + 4z = 8$.
10. Задана пирамида $SABC$ координатами вершин $A(0; 6; -1)$, $B(3; 4; 9)$, $C(-1; 7; -2)$, $S(-2; 0; 4)$:
а) составить уравнение плоскости ABC ,
б) найти расстояние от вершины S до плоскости ABC .
11. Составить уравнение плоскости π , проходящей через точку $M(2; -2; 1)$ параллельно прямым $\frac{x+7}{9} = \frac{y+8}{1} = \frac{z+7}{-1}$ и $\frac{x-4}{8} = \frac{y-6}{1} = \frac{z-1}{0}$.
12. Составить уравнение прямой AB и найти расстояние от точки C до этой прямой, если $A(3; 2; 6)$, $B(8; 9; 8)$, $C(10; 12; 9)$.
13. Привести к каноническому виду общие уравнения прямой

$$\begin{cases} 3x + 3y - 2z - 13 = 0 \\ x + 2y - z - 9 = 0 \end{cases}.$$
14. Найти проекцию точки $M(16; 6; -13)$ на плоскость $-8x + y + 7z = 129$.
15. Найти угол между прямой $l : \frac{x+3}{-2} = \frac{y+5}{3} = \frac{z+1}{1}$ и плоскостью $\pi : 2x + y + 3z + 1 = 0$.

Вариант 9.

1. В параллелепипеде $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ $\overline{AB} = \mathbf{a}$, $\overline{AD} = \mathbf{b}$, $\overline{AA_1} = \mathbf{c}$. Выразить через \mathbf{a} , \mathbf{b} , \mathbf{c} вектор $\mathbf{q} = \overline{KM}$, где K – середина ребра $A_1 B_1$, а M делит ребро DD_1 в отношении 2 : 3.
2. Доказать, что векторы $\mathbf{a}(-4; -2; -1)$, $\mathbf{b}(-5; -3; -2)$, $\mathbf{c}(2; 1; 0)$ образуют базис. Разложить вектор $\mathbf{d}(-1; -1; 0)$ по этим векторам.
3. Найти косинус угла между векторами $\mathbf{a} = 4\mathbf{m} - \mathbf{n}$ и $\mathbf{b} = 3\mathbf{m} - \mathbf{n}$ при $|\mathbf{m}| = \sqrt{3}$, $|\mathbf{n}| = 6$, $(\widehat{\mathbf{m}, \mathbf{n}}) = \frac{\pi}{6}$.
4. Найти $\text{pr}_{\mathbf{y}} \mathbf{x}$, при $\mathbf{x} = \mathbf{b} + \mathbf{c}$ и $\mathbf{y} = \mathbf{a}$, где $\mathbf{a}(-2; 1; -2)$, $\mathbf{b}(-2; 1; -3)$, $\mathbf{c}(4; 1; 3)$.
5. Найти координаты единичного вектора \mathbf{n}_0 , перпендикулярного плоскости $\triangle ABC$, где $A(6; 1; 8)$, $B(5; 4; 10)$, $C(5; 5; 11)$.
6. Вычислить площадь треугольника, построенного на векторах $\mathbf{a} = -2\mathbf{m} - 3\mathbf{n}$ и $\mathbf{b} = 3\mathbf{m} - 4\mathbf{n}$ при $|\mathbf{m}| = 3$, $|\mathbf{n}| = 3$, $(\widehat{\mathbf{m}, \mathbf{n}}) = \frac{\pi}{3}$.
7. Компланарны ли векторы $\mathbf{a}(3; -5; 3)$, $\mathbf{b}(-4; 1; 5)$, $\mathbf{c}(1; -3; 3)$?
8. Вычислить объем параллелепипеда $A_1 A_2 A_3 A_4 B_1 B_2 B_3 B_4$, площадь грани $A_1 A_2 A_3 A_4$ и высоту, опущенную на эту грань из вершины B_1 . $A_1(8; 4; -5)$, $A_2(8; 1; -4)$, $A_4(5; 10; -7)$, $B_1(4; 14; -8)$.
9. Найти косинус острого угла между плоскостями $\alpha : -2y - z + 8 = 0$ и $\beta : 2x + y - 5z = 11$.
10. Задана пирамида $SABC$ координатами вершин $A(-7; 7; 2)$, $B(-2; 8; 5)$, $C(-14; 4; -2)$, $S(8; 7; 7)$:
а) составить уравнение плоскости ABC ,
б) найти расстояние от вершины S до плоскости ABC .
11. Составить уравнение плоскости π , проходящей через точку $M(-5; 10; 4)$ перпендикулярно плоскостям $2x - y + z - 1 = 0$ и $-x + y - 3z = 6$.
12. Составить уравнение прямой AB и найти расстояние от точки C до этой прямой, если $A(6; 3; 5)$, $B(3; -5; 10)$, $C(5; 0; 7)$.
13. Привести к каноническому виду общие уравнения прямой

$$\begin{cases} x + y - z - 3 = 0 \\ -3x + y + 22 = 0 \end{cases}.$$
14. Найти координаты точки M_1 , симметричной точке $M(13; -7; -1)$ относительно плоскости $7x - 3y + 2z - 17 = 0$.
15. Найти угол между прямой $l : \frac{x-2}{1} = \frac{y+4}{-4} = \frac{z+4}{1}$ и плоскостью $\pi : 3x - y - z + 12 = 0$.

Вариант 10.

1. В параллелепипеде $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ $\overline{AB} = \mathbf{a}$, $\overline{AD} = \mathbf{b}$, $\overline{AA_1} = \mathbf{c}$. Выразить через \mathbf{a} , \mathbf{b} , \mathbf{c} вектор $\mathbf{q} = \overline{KM}$, где K – середина ребра AA_1 , а M делит ребро DC в отношении 1 : 2.
2. Доказать, что векторы $\mathbf{a}(-2; 3; -4)$, $\mathbf{b}(3; -2; 1)$, $\mathbf{c}(1; 0; -2)$ образуют базис. Разложить вектор $\mathbf{d}(-6; 3; 4)$ по этим векторам.
3. Найти косинус угла между векторами $\mathbf{a} = -\mathbf{m} - \mathbf{n}$ и $\mathbf{b} = 2\mathbf{m} + \mathbf{n}$ при $|\mathbf{m}| = 4$, $|\mathbf{n}| = 2\sqrt{3}$, $(\widehat{\mathbf{m}, \mathbf{n}}) = \frac{5\pi}{6}$.
4. Найти $\text{pr}_{\mathbf{y}} \mathbf{x}$, при $\mathbf{x} = \mathbf{b}$ и $\mathbf{y} = 2\mathbf{a} + 2\mathbf{c}$, где $\mathbf{a}(5; 3; 1)$, $\mathbf{b}(2; 1; -1)$, $\mathbf{c}(-5; 0; -3)$.
5. Найти координаты единичного вектора \mathbf{n}_0 , перпендикулярного плоскости $\triangle ABC$, где $A(9; 5; 5)$, $B(12; 3; 0)$, $C(11; 4; 2)$.
6. Вычислить площадь параллелограмма, построенного на векторах $\mathbf{a} = -\mathbf{m} + 2\mathbf{n}$ и $\mathbf{b} = 2\mathbf{m} - \mathbf{n}$ при $|\mathbf{m}| = 1$, $|\mathbf{n}| = 5$, $(\widehat{\mathbf{m}, \mathbf{n}}) = \frac{\pi}{6}$.
7. Компланарны ли векторы $\mathbf{a}(1; -2; 1)$, $\mathbf{b}(4; 1; -3)$, $\mathbf{c}(-5; 3; 0)$?
8. Вычислить объем тетраэдра с вершинами в точках A, B, C, D , площадь грани ABD и высоту, опущенную на эту грань из вершины C . $A(-2; 6; 4)$, $B(1; 4; 3)$, $C(8; 5; 4)$, $D(0; 3; 2)$.
9. Найти косинус острого угла между плоскостями $\alpha : -x + z - 10 = 0$ и $\beta : 6x + 7y - 2z = -8$.
10. Задана пирамида $SABC$ координатами вершин $A(6; -10; 10)$, $B(8; -11; 9)$, $C(5; -7; 11)$, $S(-5; 1; 7)$:
 а) составить уравнение плоскости ABC ,
 б) найти расстояние от вершины S до плоскости ABC .
11. Составить уравнение плоскости π , проходящей через точку $M(0; 1; 0)$ параллельно прямым $\frac{x-3}{-8} = \frac{y+1}{-3} = \frac{z-4}{5}$ и $\frac{x+6}{-3} = \frac{y+6}{-2} = \frac{z+5}{3}$.
12. Составить уравнение прямой AB и найти расстояние от точки C до этой прямой, если $A(7; 0; 8)$, $B(13; 1; 13)$, $C(12; 1; 12)$.
13. Привести к каноническому виду общие уравнения прямой
$$\begin{cases} -3x + 4y - z - 26 = 0 \\ x - 3y + z + 24 = 0 \end{cases}$$
.
14. Найти координаты точки M_1 , симметричной точке $M(13; 9; -21)$ относительно плоскости $-7x - 3y + 8z - 19 = 0$.
15. Найти угол между прямой $l : \frac{x+4}{-1} = \frac{y+2}{-1} = \frac{z+7}{1}$ и плоскостью $\pi : 3x + 6y + 3z - 8 = 0$.

Вариант 11.

1. В параллелепипеде $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ $\overline{AB} = \mathbf{a}$, $\overline{AD} = \mathbf{b}$, $\overline{AA_1} = \mathbf{c}$. Выразить через \mathbf{a} , \mathbf{b} , \mathbf{c} вектор $\mathbf{q} = \overline{KM}$, где K – середина ребра AB , а M делит ребро DD_1 в отношении $2 : 3$.
2. Доказать, что векторы $\mathbf{a}(1; -3; 1)$, $\mathbf{b}(3; 1; -3)$, $\mathbf{c}(2; 1; -2)$ образуют базис. Разложить вектор $\mathbf{d}(-5; -7; 9)$ по этим векторам.
3. Найти косинус угла между векторами $\mathbf{a} = -4\mathbf{m} + 2\mathbf{n}$ и $\mathbf{b} = \mathbf{m} - \mathbf{n}$ при $|\mathbf{m}| = 1$, $|\mathbf{n}| = 2\sqrt{2}$, $(\widehat{\mathbf{m}, \mathbf{n}}) = \frac{\pi}{4}$.
4. Найти $\text{pr}_{\mathbf{y}} \mathbf{x}$, при $\mathbf{x} = 3\mathbf{b} + 2\mathbf{c}$ и $\mathbf{y} = \mathbf{a}$, где $\mathbf{a}(-3; 2; 1)$, $\mathbf{b}(-6; 5; 2)$, $\mathbf{c}(7; -7; -1)$.
5. Найти координаты единичного вектора \mathbf{n}_0 , перпендикулярного плоскости $\triangle ABC$, где $A(2; 0; 4)$, $B(3; 1; 3)$, $C(3; 2; 1)$.
6. Вычислить площадь треугольника, построенного на векторах $\mathbf{a} = -4\mathbf{m} - \mathbf{n}$ и $\mathbf{b} = -\mathbf{m} - \mathbf{n}$ при $|\mathbf{m}| = 3$, $|\mathbf{n}| = 3$, $(\widehat{\mathbf{m}, \mathbf{n}}) = \frac{2\pi}{3}$.
7. Компланарны ли векторы \overline{AB} , \overline{AC} , \overline{AD} , где $A(4; 1; 3)$, $B(10; 0; 9)$, $C(0; -3; 10)$, $D(1; -1; 6)$?
8. Вычислить объем тетраэдра с вершинами в точках A, B, C, D , площадь грани ACD и высоту, опущенную на эту грань из вершины B . $A(3; 4; 2)$, $B(5; 4; 5)$, $C(13; 6; 9)$, $D(-2; 5; -5)$.
9. Найти косинус острого угла между плоскостями $\alpha : y + z - 3 = 0$ и $\beta : -8x + 3y - 4z = -12$.
10. Составить уравнение плоскости, проходящей через точки $A(-6; -9; 2)$, $B(-12; -8; 1)$, $C(-7; -8; 2)$, и найти расстояние от точки $S(-1; 8; 2)$ до этой плоскости.
11. Составить канонические уравнения прямой, проходящей через точку $M(0; -2; -1)$ параллельно плоскости $6x - y - 2z + 4 = 0$ и перпендикулярно прямой $\frac{x+7}{-5} = \frac{y}{1} = \frac{z+8}{1}$.
12. Составить уравнение прямой AB и найти расстояние от точки C до этой прямой, если $A(9; 3; 3)$, $B(10; 2; 1)$, $C(14; -1; -6)$.
13. Привести к каноническому виду общие уравнения прямой
$$\begin{cases} -2x - 2y - z + 30 = 0 \\ x - 3y - 2z + 2 = 0 \end{cases}.$$
14. Найти координаты точки M_1 , симметричной точке $M(-1; -3; 4)$ относительно плоскости $-x + 3y + 8z = -13$.
15. Найти угол между прямой $l : \frac{x+8}{-6} = \frac{y-2}{-2} = \frac{z-3}{5}$ и плоскостью $\pi : -x - y - z = -10$.

Вариант 12.

1. В параллелепипеде $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ $\overline{AB} = \mathbf{a}$, $\overline{AD} = \mathbf{b}$, $\overline{AA_1} = \mathbf{c}$. Выразить через \mathbf{a} , \mathbf{b} , \mathbf{c} вектор $\mathbf{q} = \overline{KM}$, где K – середина ребра $A_1 D_1$, а M делит ребро CC_1 в отношении 1 : 2.
2. Доказать, что векторы $\mathbf{a}(-1; -3; 0)$, $\mathbf{b}(4; -4; 5)$, $\mathbf{c}(-1; -5; 1)$ образуют базис. Разложить вектор $\mathbf{d}(-4; 6; -6)$ по этим векторам.
3. Найти косинус угла между векторами $\mathbf{a} = -\mathbf{m} + 5\mathbf{n}$ и $\mathbf{b} = \mathbf{m} - 3\mathbf{n}$ при $|\mathbf{m}| = 2$, $|\mathbf{n}| = 1$, $(\widehat{\mathbf{m}, \mathbf{n}}) = \frac{\pi}{3}$.
4. Найти $\text{pr}_{\mathbf{y}} \mathbf{x}$, при $\mathbf{x} = \mathbf{a}$ и $\mathbf{y} = 2\mathbf{b} + \mathbf{c}$, где $\mathbf{a}(-6; -2; 1)$, $\mathbf{b}(4; 1; -1)$, $\mathbf{c}(-9; -2; -1)$.
5. Найти координаты единичного вектора \mathbf{n}_0 , перпендикулярного плоскости $\triangle ABC$, где $A(0; 5; 2)$, $B(-5; 6; 1)$, $C(2; 4; 4)$.
6. Вычислить площадь треугольника, построенного на векторах $\mathbf{a} = 2\mathbf{m} - 3\mathbf{n}$ и $\mathbf{b} = -2\mathbf{m} + 2\mathbf{n}$ при $|\mathbf{m}| = 5$, $|\mathbf{n}| = 2$, $(\widehat{\mathbf{m}, \mathbf{n}}) = \frac{5\pi}{6}$.
7. Компланарны ли векторы \overline{AB} , \overline{AC} , \overline{AD} , где $A(2; 7; 7)$, $B(0; 8; 7)$, $C(5; 8; 2)$, $D(1; 7; 8)$?
8. Вычислить объем параллелепипеда $ABCDEFGH$, площадь грани $ABCD$ и высоту, опущенную на эту грань из вершины E . $A(8; -7; 6)$, $B(10; -3; 7)$, $D(3; -16; 4)$, $E(10; -4; 7)$.
9. Найти косинус острого угла между плоскостями $\alpha : x + 2y + 4z = -1$ и $\beta : -2y - z - 10 = 0$.
10. Составить уравнение плоскости, проходящей через точки $A(3; -2; -2)$, $B(4; 5; -3)$, $C(5; 7; -3)$, и найти расстояние от точки $S(6; 7; 0)$ до этой плоскости.
11. Составить уравнение плоскости π , проходящей через точку $M(-1; -5; -1)$ параллельно прямой $\frac{x+1}{3} = \frac{y-2}{2} = \frac{z+3}{1}$ и перпендикулярно плоскости $-4x - y = 1$.
12. Составить уравнение прямой AB и найти расстояние от точки C до этой прямой, если $A(7; 7; 5)$, $B(12; 14; 8)$, $C(9; 10; 6)$.
13. Привести к каноническому виду общие уравнения прямой
$$\begin{cases} x + 2y - z - 23 = 0 \\ -x - 3y + 2z + 28 = 0 \end{cases}.$$
14. Найти координаты точки M_1 , симметричной точке $M(-4; 1; 0)$ относительно плоскости $y + 3z - 16 = 0$.
15. Найти угол между прямой $l : \frac{x}{1} = \frac{y+4}{2} = \frac{z-3}{-1}$ и плоскостью $\pi : -5x - 2y - 2z = 6$.

Вариант 13.

1. В параллелепипеде $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ $\overline{AB} = \mathbf{a}$, $\overline{AD} = \mathbf{b}$, $\overline{AA_1} = \mathbf{c}$. Выразить через \mathbf{a} , \mathbf{b} , \mathbf{c} вектор $\mathbf{q} = \overline{KM}$, где K – середина ребра AA_1 , а M делит ребро $D_1 C_1$ в отношении 2 : 3.
2. Доказать, что векторы $\mathbf{a}(-2; 1; -2)$, $\mathbf{b}(2; -2; 1)$, $\mathbf{c}(5; -6; 4)$ образуют базис. Разложить вектор $\mathbf{d}(7; -8; 5)$ по этим векторам.
3. Найти косинус угла между векторами $\mathbf{a} = -2\mathbf{m} - \mathbf{n}$ и $\mathbf{b} = \mathbf{m} - 2\mathbf{n}$ при $|\mathbf{m}| = 1$, $|\mathbf{n}| = 2$, $(\widehat{\mathbf{m}, \mathbf{n}}) = \frac{2\pi}{3}$.
4. Найти $\text{pr}_{\mathbf{y}} \mathbf{x}$, при $\mathbf{x} = 3\mathbf{a} + 5\mathbf{c}$ и $\mathbf{y} = \mathbf{b}$, где $\mathbf{a}(3; 2; -2)$, $\mathbf{b}(1; 1; -1)$, $\mathbf{c}(-2; -1; 0)$.
5. Найти координаты единичного вектора \mathbf{n}_0 , перпендикулярного плоскости $\triangle ABC$, где $A(4; 0; 2)$, $B(2; -1; 6)$, $C(7; 1; -5)$.
6. Вычислить площадь треугольника, построенного на векторах $\mathbf{a} = -3\mathbf{m} - 4\mathbf{n}$ и $\mathbf{b} = \mathbf{m} + 3\mathbf{n}$ при $|\mathbf{m}| = 2$, $|\mathbf{n}| = 3$, $(\widehat{\mathbf{m}, \mathbf{n}}) = \frac{\pi}{3}$.
7. Лежат ли точки $A(4; 8; 0)$, $B(0; 7; 3)$, $C(3; 3; -4)$, $D(5; 11; 2)$ в одной плоскости?
8. Вычислить объем тетраэдра с вершинами в точках P, Q, R, S , площадь грани PRS и высоту, опущенную на эту грань из вершины Q . $P(-6; 4; -6)$, $Q(-3; 6; 1)$, $R(-3; 5; -1)$, $S(-5; 2; -11)$.
9. Найти косинус острого угла между плоскостями $\alpha : 3y + 3z - 6 = 0$ и $\beta : -x - y - z = 6$.
10. Составить уравнение плоскости, проходящей через точки $A(6; 3; 2)$, $B(7; 4; -6)$, $C(7; 5; -7)$, и найти расстояние от точки $S(1; 1; 5)$ до этой плоскости.
11. Составить уравнение плоскости π , проходящей через точку $M(-7; -6; 0)$ перпендикулярно плоскостям $4x - y + 3z - 5 = 0$ и $-3x + y - 2z - 1 = 0$.
12. Составить уравнение прямой AB и найти расстояние от точки C до этой прямой, если $A(8; 9; 2)$, $B(9; 12; 0)$, $C(11; 19; -5)$.
13. Привести к каноническому виду общие уравнения прямой

$$\begin{cases} 2x + 9y - 3z - 27 = 0 \\ -x - 7y + 2z + 17 = 0 \end{cases}.$$
14. Найти координаты точки M_1 , симметричной точке $M(4; 2; -8)$ относительно плоскости $-5x + 4y + 9z + 23 = 0$.
15. Найти угол между прямой $l : \frac{x+4}{1} = \frac{y+6}{-1} = \frac{z+2}{-1}$ и плоскостью $\pi : 3x - 4y + 5z + 5 = 0$.

Вариант 14.

1. В параллелепипеде $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ $\overline{AB} = \mathbf{a}$, $\overline{AD} = \mathbf{b}$, $\overline{AA_1} = \mathbf{c}$. Выразить через \mathbf{a} , \mathbf{b} , \mathbf{c} вектор $\mathbf{q} = \overline{KM}$, где K – середина ребра $B_1 C_1$, а M делит ребро AA_1 в отношении 2 : 3.
2. Доказать, что векторы $\mathbf{a}(3; 1; -1)$, $\mathbf{b}(-2; -2; 1)$, $\mathbf{c}(-5; -3; 3)$ образуют базис. Разложить вектор $\mathbf{d}(1; -1; 1)$ по этим векторам.
3. Найти косинус угла между векторами $\mathbf{a} = 2\mathbf{m} - 4\mathbf{n}$ и $\mathbf{b} = \mathbf{m} - \mathbf{n}$ при $|\mathbf{m}| = 2$, $|\mathbf{n}| = \sqrt{3}$, $(\widehat{\mathbf{m}, \mathbf{n}}) = \frac{\pi}{6}$.
4. Найти $\text{pr}_{\mathbf{y}} \mathbf{x}$, при $\mathbf{x} = \mathbf{a}$ и $\mathbf{y} = \mathbf{b} + \mathbf{c}$, где $\mathbf{a}(-5; -3; 7)$, $\mathbf{b}(-1; -1; 2)$, $\mathbf{c}(4; -4; 1)$.
5. Найти координаты единичного вектора \mathbf{n}_0 , перпендикулярного плоскости $\triangle ABC$, где $A(1; 3; 5)$, $B(6; 4; 5)$, $C(5; 4; 6)$.
6. Вычислить площадь треугольника, построенного на векторах $\mathbf{a} = -4\mathbf{m} + \mathbf{n}$ и $\mathbf{b} = 3\mathbf{m} + 4\mathbf{n}$ при $|\mathbf{m}| = 2$, $|\mathbf{n}| = 3$, $(\widehat{\mathbf{m}, \mathbf{n}}) = \frac{3\pi}{4}$.
7. Компланарны ли векторы $\mathbf{a}(3; 0; 1)$, $\mathbf{b}(-7; 1; -3)$, $\mathbf{c}(-3; -3; -1)$?
8. Вычислить объем тетраэдра с вершинами в точках A, B, C, D , площадь грани BCD и высоту, опущенную на эту грань из вершины A . $A(3; 0; -5)$, $B(2; -1; -8)$, $C(5; -7; -9)$, $D(5; -4; -7)$.
9. Найти косинус острого угла между плоскостями $\alpha : -3x + y - 4z = 0$ и $\beta : -2x + y - 2 = 0$.
10. Задана пирамида $SABC$ координатами вершин $A(-5; -2; 0)$, $B(-4; -1; -2)$, $C(-4; 1; -1)$, $S(-1; 0; 1)$:
 а) составить уравнение плоскости ABC ,
 б) найти расстояние от вершины S до плоскости ABC .
11. Составить уравнение плоскости π , проходящей через точку $M(-3; -8; -4)$ параллельно прямой $\frac{x-5}{1} = \frac{y-2}{1} = \frac{z-1}{-3}$ и перпендикулярно плоскости $x + 2y - 7z = -5$.
12. Составить уравнение прямой AB и найти расстояние от точки C до этой прямой, если $A(2; 3; 8)$, $B(5; 5; 7)$, $C(12; 10; 5)$.
13. Привести к каноническому виду общие уравнения прямой

$$\begin{cases} -x + y + z - 1 = 0 \\ -3x + 5y + 2z + 1 = 0 \end{cases}.$$
14. Найти проекцию точки $M(-13; 23; 7)$ на плоскость $-4x + 7y + 8z - 11 = 0$.
15. Найти угол между прямой $l : \frac{x+2}{1} = \frac{y-6}{3} = \frac{z}{-2}$ и плоскостью $\pi : -x - 3y - z = -14$.

Вариант 15.

1. В параллелепипеде $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ $\overline{AB} = \mathbf{a}$, $\overline{AD} = \mathbf{b}$, $\overline{AA_1} = \mathbf{c}$. Выразить через \mathbf{a} , \mathbf{b} , \mathbf{c} вектор $\mathbf{q} = \overline{KM}$, где K – середина ребра BB_1 , а M делит ребро $A_1 D_1$ в отношении 1 : 2.
2. Доказать, что векторы $\mathbf{a}(2; 1; -1)$, $\mathbf{b}(2; 5; -1)$, $\mathbf{c}(-3; 2; 2)$ образуют базис. Разложить вектор $\mathbf{d}(6; 0; -4)$ по этим векторам.
3. Найти косинус угла между векторами $\mathbf{a} = -8\mathbf{m} + 2\mathbf{n}$ и $\mathbf{b} = 5\mathbf{m} - \mathbf{n}$ при $|\mathbf{m}| = 1$, $|\mathbf{n}| = 2\sqrt{3}$, $(\widehat{\mathbf{m}, \mathbf{n}}) = \frac{\pi}{6}$.
4. Найти $\text{pr}_{\mathbf{y}} \mathbf{x}$, при $\mathbf{x} = \mathbf{a}$ и $\mathbf{y} = 3\mathbf{b} + \mathbf{c}$, где $\mathbf{a}(-1; -3; 2)$, $\mathbf{b}(-7; -2; 5)$, $\mathbf{c}(26; 2; -9)$.
5. Найти координаты единичного вектора \mathbf{n}_0 , перпендикулярного плоскости $\triangle ABC$, где $A(4; 9; 6)$, $B(6; 8; 14)$, $C(3; 10; -1)$.
6. Вычислить площадь треугольника, построенного на векторах $\mathbf{a} = -2\mathbf{m} + 3\mathbf{n}$ и $\mathbf{b} = -2\mathbf{m} + 4\mathbf{n}$ при $|\mathbf{m}| = 2$, $|\mathbf{n}| = 2$, $(\widehat{\mathbf{m}, \mathbf{n}}) = \frac{\pi}{4}$.
7. Компланарны ли векторы $\mathbf{a}(0; 1; -1)$, $\mathbf{b}(3; -4; 1)$, $\mathbf{c}(1; -1; 0)$?
8. Вычислить объем тетраэдра с вершинами в точках A, B, C, D , площадь грани ABD и высоту, опущенную на эту грань из вершины C . $A(4; -9; -2)$, $B(6; -4; 1)$, $C(3; -9; -4)$, $D(3; -7; -2)$.
9. Найти косинус острого угла между плоскостями $\alpha : x - y - 8 = 0$ и $\beta : -4x + 3y + z = 12$.
10. Составить уравнение плоскости, проходящей через точки $A(4; 9; -3)$, $B(2; 10; -2)$, $C(-1; 10; -1)$, и найти расстояние от точки $S(5; -4; 1)$ до этой плоскости.
11. Составить уравнение плоскости π , проходящей через точку $M(-5; -1; 0)$ параллельно прямым $\frac{x-4}{4} = \frac{y+4}{1} = \frac{z-3}{0}$ и $\frac{x+4}{-1} = \frac{y+7}{1} = \frac{z-5}{1}$.
12. Составить уравнение прямой AB и найти расстояние от точки C до этой прямой, если $A(3; 2; 9)$, $B(4; 3; 7)$, $C(1; 1; 12)$.
13. Привести к каноническому виду общие уравнения прямой
$$\begin{cases} 9x - y + z + 1 = 0 \\ 8x - 2y + z + 4 = 0 \end{cases}.$$
14. Найти проекцию точки $M(7; -17; -12)$ на плоскость $-3x + 7y + 3z + 42 = 0$.
15. Найти угол между прямой $l : \frac{x+5}{-2} = \frac{y+5}{1} = \frac{z}{5}$ и плоскостью $\pi : x + y + z + 5 = 0$.

Вариант 16.

1. В параллелепипеде $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ $\overline{AB} = \mathbf{a}$, $\overline{AD} = \mathbf{b}$, $\overline{AA_1} = \mathbf{c}$. Выразить через \mathbf{a} , \mathbf{b} , \mathbf{c} вектор $\mathbf{q} = \overline{KM}$, где K – середина ребра $A_1 B_1$, а M делит ребро DD_1 в отношении 1 : 2.
2. Доказать, что векторы $\mathbf{a}(6; -3; -5)$, $\mathbf{b}(3; -1; -2)$, $\mathbf{c}(-5; 4; 5)$ образуют базис. Разложить вектор $\mathbf{d}(10; 1; -5)$ по этим векторам.
3. Найти косинус угла между векторами $\mathbf{a} = 2\mathbf{m} + \mathbf{n}$ и $\mathbf{b} = 3\mathbf{m} + \mathbf{n}$ при $|\mathbf{m}| = 1$, $|\mathbf{n}| = 2$, $(\widehat{\mathbf{m}, \mathbf{n}}) = \frac{2\pi}{3}$.
4. Найти $\text{pr}_{\mathbf{y}} \mathbf{x}$, при $\mathbf{x} = 3\mathbf{b} + \mathbf{c}$ и $\mathbf{y} = \mathbf{a}$, где $\mathbf{a}(-3; -3; 4)$, $\mathbf{b}(-1; -2; 2)$, $\mathbf{c}(2; 11; -1)$.
5. Найти координаты единичного вектора \mathbf{n}_0 , перпендикулярного плоскости $\triangle ABC$, где $A(4; 0; 3)$, $B(5; -7; 2)$, $C(5; -10; 3)$.
6. Вычислить площадь треугольника, построенного на векторах $\mathbf{a} = -4\mathbf{m} - 4\mathbf{n}$ и $\mathbf{b} = 2\mathbf{m} - 3\mathbf{n}$ при $|\mathbf{m}| = 2$, $|\mathbf{n}| = 4$, $(\widehat{\mathbf{m}, \mathbf{n}}) = \frac{\pi}{3}$.
7. Лежат ли точки $A(7; 1; 2)$, $B(6; 0; -1)$, $C(6; 1; 0)$, $D(7; 0; 1)$ в одной плоскости?
8. Вычислить объем тетраэдра с вершинами в точках A_1, A_2, A_3, A_4 , площадь грани $A_2 A_3 A_4$ и высоту, опущенную на эту грань из вершины A_1 . $A_1(11; -5; -8)$, $A_2(4; -1; -5)$, $A_3(3; -4; -7)$, $A_4(-3; 1; -3)$.
9. Найти косинус острого угла между плоскостями $\alpha : -x + 6y + 3z = -3$ и $\beta : -x - z - 3 = 0$.
10. Задана пирамида $SABC$ координатами вершин $A(3; -4; -4)$, $B(4; -3; -5)$, $C(11; 0; -7)$, $S(7; 3; -3)$:
 а) составить уравнение плоскости ABC ,
 б) найти расстояние от вершины S до плоскости ABC .
11. Составить уравнение плоскости π , проходящей через точку $M(-8; -2; -1)$ параллельно прямой $\frac{x-6}{2} = \frac{y-1}{5} = \frac{z-6}{-1}$ и перпендикулярно плоскости $-x - 3y + z + 6 = 0$.
12. Составить уравнение прямой AB и найти расстояние от точки C до этой прямой, если $A(8; 1; 7)$, $B(17; 3; 14)$, $C(12; 2; 10)$.
13. Привести к каноническому виду общие уравнения прямой
$$\begin{cases} x + y + z + 20 = 0 \\ 2x - 2y + 3z + 22 = 0 \end{cases}.$$
14. Найти проекцию точки $M(5; 1; -16)$ на плоскость $-5x - y + 4z + 6 = 0$.
15. Найти угол между прямой $l : \frac{x+8}{-4} = \frac{y-2}{2} = \frac{z-2}{-3}$ и плоскостью $\pi : -x + 2y + z + 1 = 0$.

Вариант 17.

1. В параллелепипеде $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ $\overline{AB} = \mathbf{a}$, $\overline{AD} = \mathbf{b}$, $\overline{AA_1} = \mathbf{c}$. Выразить через \mathbf{a} , \mathbf{b} , \mathbf{c} вектор $\mathbf{q} = \overline{KM}$, где K – середина ребра $D_1 C_1$, а M делит ребро BB_1 в отношении 2 : 3.
2. Доказать, что векторы $\mathbf{a}(-2; 5; -5)$, $\mathbf{b}(1; 4; -3)$, $\mathbf{c}(-3; 2; -3)$ образуют базис. Разложить вектор $\mathbf{d}(1; 3; -2)$ по этим векторам.
3. Найти косинус угла между векторами $\mathbf{a} = \mathbf{m} - 7\mathbf{n}$ и $\mathbf{b} = -\mathbf{m} + \mathbf{n}$ при $|\mathbf{m}| = \sqrt{3}$, $|\mathbf{n}| = 2$, $(\widehat{\mathbf{m}, \mathbf{n}}) = \frac{\pi}{6}$.
4. Найти $\text{pr}_{\mathbf{y}} \mathbf{x}$, при $\mathbf{x} = \mathbf{a}$ и $\mathbf{y} = 2\mathbf{b} + \mathbf{c}$, где $\mathbf{a}(4; 2; 1)$, $\mathbf{b}(3; 1; 2)$, $\mathbf{c}(-12; -4; -3)$.
5. Найти координаты единичного вектора \mathbf{n}_0 , перпендикулярного плоскости $\triangle ABC$, где $A(4; 3; 4)$, $B(1; 4; 3)$, $C(-3; 4; 4)$.
6. Вычислить площадь треугольника, построенного на векторах $\mathbf{a} = 3\mathbf{m} - 4\mathbf{n}$ и $\mathbf{b} = 2\mathbf{m} + 3\mathbf{n}$ при $|\mathbf{m}| = 5$, $|\mathbf{n}| = 3$, $(\widehat{\mathbf{m}, \mathbf{n}}) = \frac{2\pi}{3}$.
7. Компланарны ли векторы $\mathbf{a}(3; -5; 2)$, $\mathbf{b}(1; -4; 3)$, $\mathbf{c}(-1; 1; 0)$?
8. Вычислить объем параллелепипеда $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$, площадь грани $ABCD$ и высоту, опущенную на эту грань из вершины A_1 . $A(-2; -2; -2)$, $B(5; -5; -4)$, $D(-2; -3; -4)$, $A_1(-7; 2; 3)$.
9. Найти косинус острого угла между плоскостями $\alpha : -2x + y + 3z = 13$ и $\beta : x + 2z + 2 = 0$.
10. Составить уравнение плоскости, проходящей через точки $A(2; -3; 5)$, $B(0; 0; 8)$, $C(-1; 1; 6)$, и найти расстояние от точки $S(-4; -1; -1)$ до этой плоскости.
11. Составить уравнение плоскости π , проходящей через точку $M(4; 1; 6)$ параллельно прямой $\frac{x-3}{3} = \frac{y-2}{2} = \frac{z+5}{-5}$ и перпендикулярно плоскости $-2x - y + z = -3$.
12. Составить уравнение прямой AB и найти расстояние от точки C до этой прямой, если $A(1; 7; 7)$, $B(-6; 10; 8)$, $C(-4; 9; 8)$.
13. Привести к каноническому виду общие уравнения прямой
$$\begin{cases} x + y - 11 = 0 \\ -x + 4y + z - 1 = 0 \end{cases}.$$
14. Найти проекцию точки $M(-16; 0; 18)$ на плоскость $3x + 4y - 4z + 38 = 0$.
15. Найти угол между прямой $l : \frac{x+2}{2} = \frac{y-7}{-1} = \frac{z-6}{1}$ и плоскостью $\pi : 2x - 3y + 4z = -11$.

Вариант 18.

1. В параллелепипеде $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ $\overline{AB} = \mathbf{a}$, $\overline{AD} = \mathbf{b}$, $\overline{AA_1} = \mathbf{c}$. Выразить через \mathbf{a} , \mathbf{b} , \mathbf{c} вектор $\mathbf{q} = \overline{KM}$, где K – середина ребра AA_1 , а M делит ребро DC в отношении 1 : 2.
2. Доказать, что векторы $\mathbf{a}(1; -1; 2)$, $\mathbf{b}(2; -3; 2)$, $\mathbf{c}(4; -3; 5)$ образуют базис. Разложить вектор $\mathbf{d}(-5; 3; -4)$ по этим векторам.
3. Найти косинус угла между векторами $\mathbf{a} = -2\mathbf{m} + \mathbf{n}$ и $\mathbf{b} = 9\mathbf{m} - 2\mathbf{n}$ при $|\mathbf{m}| = 1$, $|\mathbf{n}| = 2\sqrt{2}$, $(\widehat{\mathbf{m}, \mathbf{n}}) = \frac{\pi}{4}$.
4. Найти $\text{pr}_{\mathbf{y}} \mathbf{x}$, при $\mathbf{x} = \mathbf{a} + 2\mathbf{c}$ и $\mathbf{y} = \mathbf{b}$, где $\mathbf{a}(1; 1; -2)$, $\mathbf{b}(-3; 2; 3)$, $\mathbf{c}(1; -1; -1)$.
5. Найти координаты единичного вектора \mathbf{n}_0 , перпендикулярного плоскости $\triangle ABC$, где $A(2; 1; 3)$, $B(3; -6; 4)$, $C(0; 6; 2)$.
6. Вычислить площадь треугольника, построенного на векторах $\mathbf{a} = 3\mathbf{m} + 3\mathbf{n}$ и $\mathbf{b} = 3\mathbf{m} - 4\mathbf{n}$ при $|\mathbf{m}| = 4$, $|\mathbf{n}| = 1$, $(\widehat{\mathbf{m}, \mathbf{n}}) = \frac{\pi}{6}$.
7. Компланарны ли векторы \overline{AB} , \overline{AC} , \overline{AD} , где $A(2; 1; 2)$, $B(-1; -2; 6)$, $C(6; -1; 3)$, $D(3; 6; -4)$?
8. Вычислить объем параллелепипеда $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$, площадь грани $ABCD$ и высоту, опущенную на эту грань из вершины A_1 . $A(0; 6; 4)$, $B(-4; 4; -1)$, $D(2; 8; 5)$, $A_1(-7; 1; -1)$.
9. Найти косинус острого угла между плоскостями $\alpha : -x + 2y + 13 = 0$ и $\beta : -3x + 3y - 4z = 4$.
10. Задана пирамида $SABC$ координатами вершин $A(2; 2; 4)$, $B(5; -2; 3)$, $C(0; 5; 6)$, $S(-6; 3; 7)$:
а) составить уравнение плоскости ABC ,
б) найти расстояние от вершины S до плоскости ABC .
11. Составить уравнение плоскости π , проходящей через точку $M(-5; 2; 4)$ параллельно прямым $\frac{x+8}{2} = \frac{y+2}{2} = \frac{z+1}{-1}$ и $\frac{x-1}{-1} = \frac{y+2}{1} = \frac{z+7}{0}$.
12. Составить уравнение прямой AB и найти расстояние от точки C до этой прямой, если $A(3; 8; 6)$, $B(6; 6; 5)$, $C(-7; 15; 10)$.
13. Привести к каноническому виду общие уравнения прямой

$$\begin{cases} -6x - y + 23 = 0 \\ -5x - 2y - z + 29 = 0 \end{cases}.$$
14. Найти координаты точки M_1 , симметричной точке $M(-11; 9; -10)$ относительно плоскости $9x - 8y + 7z - 50 = 0$.
15. Найти угол между прямой $l : \frac{x+3}{-5} = \frac{y+5}{5} = \frac{z+4}{4}$ и плоскостью $\pi : x + y + z = -5$.

Вариант 19.

1. В параллелепипеде $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ $\overline{AB} = \mathbf{a}$, $\overline{AD} = \mathbf{b}$, $\overline{AA_1} = \mathbf{c}$. Выразить через \mathbf{a} , \mathbf{b} , \mathbf{c} вектор $\mathbf{q} = \overline{KM}$, где K – середина ребра $A_1 D_1$, а M делит ребро CC_1 в отношении 3 : 1.
2. Доказать, что векторы $\mathbf{a}(4; 3; 2)$, $\mathbf{b}(1; 4; 1)$, $\mathbf{c}(-5; 1; -2)$ образуют базис. Разложить вектор $\mathbf{d}(5; -9; 1)$ по этим векторам.
3. Найти косинус угла между векторами $\mathbf{a} = 2\mathbf{m} - 6\mathbf{n}$ и $\mathbf{b} = -\mathbf{m} + 2\mathbf{n}$ при $|\mathbf{m}| = 2\sqrt{3}$, $|\mathbf{n}| = 2$, $(\widehat{\mathbf{m}, \mathbf{n}}) = \frac{\pi}{6}$.
4. Найти $\text{pr}_{\mathbf{y}} \mathbf{x}$, при $\mathbf{x} = 3\mathbf{a} + 3\mathbf{c}$ и $\mathbf{y} = \mathbf{b}$, где $\mathbf{a}(0; -5; 1)$, $\mathbf{b}(3; -1; -6)$, $\mathbf{c}(-2; 3; -2)$.
5. Найти координаты единичного вектора \mathbf{n}_0 , перпендикулярного плоскости $\triangle ABC$, где $A(2; 3; 2)$, $B(9; 4; 2)$, $C(-7; 2; 3)$.
6. Вычислить площадь параллелограмма, построенного на векторах $\mathbf{a} = -4\mathbf{m} - 3\mathbf{n}$ и $\mathbf{b} = -\mathbf{m} + \mathbf{n}$ при $|\mathbf{m}| = 5$, $|\mathbf{n}| = 4$, $(\widehat{\mathbf{m}, \mathbf{n}}) = \frac{\pi}{3}$.
7. Лежат ли точки $A(3; 8; 9)$, $B(8; 7; 5)$, $C(7; 10; 4)$, $D(4; 10; 7)$ в одной плоскости?
8. Вычислить объем тетраэдра с вершинами в точках A_1, A_2, A_3, A_4 , площадь грани $A_1 A_3 A_4$ и высоту, опущенную на эту грань из вершины A_2 . $A_1(-2; 1; -4)$, $A_2(-8; 11; 3)$, $A_3(-1; -1; -3)$, $A_4(-6; 10; -7)$.
9. Найти косинус острого угла между плоскостями $\alpha : -6x + 2z - 10 = 0$ и $\beta : x - y - z = 10$.
10. Составить уравнение плоскости, проходящей через точки $A(2; 4; -6)$, $B(5; 1; -8)$, $C(6; 3; -7)$, и найти расстояние от точки $S(2; -2; 4)$ до этой плоскости.
11. Составить уравнение плоскости π , проходящей через точку $M(-1; 10; -5)$ параллельно прямой $\frac{x+7}{2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-4}{1}$ и перпендикулярно плоскости $3x + y + 2z - 7 = 0$.
12. Составить уравнение прямой AB и найти расстояние от точки C до этой прямой, если $A(5; 6; 6)$, $B(1; 11; 5)$, $C(8; 2; 7)$.
13. Привести к каноническому виду общие уравнения прямой
$$\begin{cases} 2x + y - z - 11 = 0 \\ 3x + 2y - 6z + 13 = 0 \end{cases}.$$
14. Найти проекцию точки $M(-11; -8; 9)$ на плоскость $4x + 4y - z = 47$.
15. Найти угол между прямой $l : \frac{x+2}{-2} = \frac{y+8}{-2} = \frac{z-7}{2}$ и плоскостью $\pi : 2x + 2y - 2z + 1 = 0$.

Вариант 20.

1. В параллелепипеде $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ $\overline{AB} = \mathbf{a}$, $\overline{AD} = \mathbf{b}$, $\overline{AA_1} = \mathbf{c}$. Выразить через \mathbf{a} , \mathbf{b} , \mathbf{c} вектор $\mathbf{q} = \overline{KM}$, где K – середина ребра BB_1 , а M делит ребро $A_1 D_1$ в отношении 1 : 2.
2. Доказать, что векторы $\mathbf{a}(-2; -2; 5)$, $\mathbf{b}(0; 2; -3)$, $\mathbf{c}(-1; 5; -6)$ образуют базис. Разложить вектор $\mathbf{d}(-1; -5; 8)$ по этим векторам.
3. Найти косинус угла между векторами $\mathbf{a} = -4\mathbf{m} - \mathbf{n}$ и $\mathbf{b} = -\mathbf{m} - \mathbf{n}$ при $|\mathbf{m}| = 2$, $|\mathbf{n}| = 1$, $(\widehat{\mathbf{m}, \mathbf{n}}) = \frac{2\pi}{3}$.
4. Найти $\text{pr}_{\mathbf{y}} \mathbf{x}$, при $\mathbf{x} = \mathbf{b} + 3\mathbf{c}$ и $\mathbf{y} = \mathbf{a}$, где $\mathbf{a}(1; 2; 1)$, $\mathbf{b}(-4; -5; 0)$, $\mathbf{c}(1; 2; 2)$.
5. Найти координаты единичного вектора \mathbf{n}_0 , перпендикулярного плоскости $\triangle ABC$, где $A(3; 7; 5)$, $B(6; 0; 3)$, $C(8; -3; 2)$.
6. Вычислить площадь параллелограмма, построенного на векторах $\mathbf{a} = 3\mathbf{m} - 4\mathbf{n}$ и $\mathbf{b} = -4\mathbf{m} + 3\mathbf{n}$ при $|\mathbf{m}| = 5$, $|\mathbf{n}| = 2$, $(\widehat{\mathbf{m}, \mathbf{n}}) = \frac{\pi}{4}$.
7. Лежат ли точки $A(7; 0; 8)$, $B(12; 2; 14)$, $C(8; 1; 12)$, $D(11; 0; 7)$ в одной плоскости?
8. Вычислить объем параллелепипеда $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$, площадь грани $ABCD$ и высоту, опущенную на эту грань из вершины A_1 . $A(-5; -8; 7)$, $B(-8; -6; 5)$, $D(-6; -6; 8)$, $A_1(-6; -9; 5)$.
9. Найти косинус острого угла между плоскостями $\alpha : x + y + 6 = 0$ и $\beta : 4x + 3y + 4z = 8$.
10. Составить уравнение плоскости, проходящей через точки $A(-5; 4; -2)$, $B(-4; 8; -1)$, $C(-4; 9; 0)$, и найти расстояние от точки $S(-8; -4; 5)$ до этой плоскости.
11. Составить уравнение плоскости π , проходящей через точку $M(-2; -1; 6)$ параллельно прямой $\frac{x-2}{2} = \frac{y-1}{-5} = \frac{z+5}{-3}$ и перпендикулярно плоскости $x + y - z + 2 = 0$.
12. Составить уравнение прямой AB и найти расстояние от точки C до этой прямой, если $A(5; 2; 4)$, $B(7; 5; 5)$, $C(4; 1; 3)$.
13. Привести к каноническому виду общие уравнения прямой
$$\begin{cases} 2x - 5y - z + 22 = 0 \\ -x - 2y + z - 16 = 0 \end{cases}.$$
14. Найти проекцию точки $M(7; -2; 1)$ на плоскость $2x + 3y - z + 21 = 0$.
15. Найти угол между прямой $l : \frac{x+3}{-3} = \frac{y}{-4} = \frac{z}{-1}$ и плоскостью $\pi : x + y + z - 3 = 0$.

Вариант 21.

1. В параллелепипеде $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ $\overline{AB} = \mathbf{a}$, $\overline{AD} = \mathbf{b}$, $\overline{AA_1} = \mathbf{c}$. Выразить через \mathbf{a} , \mathbf{b} , \mathbf{c} вектор $\mathbf{q} = \overline{KM}$, где K – середина ребра AA_1 , а M делит ребро DC в отношении $1 : 2$.
2. Доказать, что векторы $\mathbf{a}(1; 2; 1)$, $\mathbf{b}(-1; 1; 3)$, $\mathbf{c}(2; 1; -1)$ образуют базис. Разложить вектор $\mathbf{d}(5; -2; -7)$ по этим векторам.
3. Найти косинус угла между векторами $\mathbf{a} = \mathbf{m} - \mathbf{n}$ и $\mathbf{b} = -\mathbf{m} - \mathbf{n}$ при $|\mathbf{m}| = \sqrt{2}$, $|\mathbf{n}| = 2$, $(\widehat{\mathbf{m}, \mathbf{n}}) = \frac{\pi}{4}$.
4. Найти $\text{pr}_{\mathbf{y}} \mathbf{x}$, при $\mathbf{x} = \mathbf{b} + \mathbf{c}$ и $\mathbf{y} = \mathbf{a}$, где $\mathbf{a}(6; 5; 4)$, $\mathbf{b}(4; 3; 3)$, $\mathbf{c}(-3; -6; 1)$.
5. Найти координаты единичного вектора \mathbf{n}_0 , перпендикулярного плоскости $\triangle ABC$, где $A(2; 0; 8)$, $B(7; 3; 4)$, $C(-6; -5; 15)$.
6. Вычислить площадь параллелограмма, построенного на векторах $\mathbf{a} = -3\mathbf{m} - \mathbf{n}$ и $\mathbf{b} = -4\mathbf{m} + 2\mathbf{n}$ при $|\mathbf{m}| = 2$, $|\mathbf{n}| = 2$, $(\widehat{\mathbf{m}, \mathbf{n}}) = \frac{5\pi}{6}$.
7. Компланарны ли векторы $\mathbf{a}(3; -7; -4)$, $\mathbf{b}(0; -5; -4)$, $\mathbf{c}(1; -4; -3)$?
8. Вычислить объем тетраэдра с вершинами в точках A, B, C, D , площадь грани ABC и высоту, опущенную на эту грань из вершины D . $A(2; 0; -6)$, $B(5; 1; -3)$, $C(0; -1; -8)$, $D(7; 5; -7)$.
9. Найти косинус острого угла между плоскостями $\alpha : 2x - 6y - 4z = -5$ и $\beta : x - z - 9 = 0$.
10. Задана пирамида $SABC$ координатами вершин $A(-4; 4; 7)$, $B(-11; 5; 6)$, $C(-2; 5; 7)$, $S(-3; 0; -7)$:
 а) составить уравнение плоскости ABC ,
 б) найти расстояние от вершины S до плоскости ABC .
11. Составить уравнение плоскости π , проходящей через точку $M(3; 9; 2)$ параллельно прямой $\frac{x+7}{-1} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-3}{7}$ и перпендикулярно плоскости $-2x + y + 9z - 7 = 0$.
12. Составить уравнение прямой AB и найти расстояние от точки C до этой прямой, если $A(1; 8; 1)$, $B(2; 9; -1)$, $C(-1; 7; 4)$.
13. Привести к каноническому виду общие уравнения прямой
$$\begin{cases} x + y - 6 = 0 \\ x + 2y + z - 16 = 0 \end{cases}.$$
14. Найти проекцию точки $M(11; -10; 9)$ на плоскость $-9x + 3y - 4z - 47 = 0$.
15. Найти угол между прямой $l : \frac{x+8}{1} = \frac{y+6}{1} = \frac{z+4}{-1}$ и плоскостью $\pi : x + 4y + 2z - 12 = 0$.

Вариант 22.

1. В параллелепипеде $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ $\overline{AB} = \mathbf{a}$, $\overline{AD} = \mathbf{b}$, $\overline{AA_1} = \mathbf{c}$. Выразить через \mathbf{a} , \mathbf{b} , \mathbf{c} вектор $\mathbf{q} = \overline{KM}$, где K – середина ребра $B_1 C_1$, а M делит ребро AB в отношении 1 : 2.
2. Доказать, что векторы $\mathbf{a}(1; -1; 4)$, $\mathbf{b}(-1; 0; -5)$, $\mathbf{c}(2; -3; 1)$ образуют базис. Разложить вектор $\mathbf{d}(-1; 2; -3)$ по этим векторам.
3. Найти косинус угла между векторами $\mathbf{a} = 2\mathbf{m} - 3\mathbf{n}$ и $\mathbf{b} = -4\mathbf{m} + 2\mathbf{n}$ при $|\mathbf{m}| = 2$, $|\mathbf{n}| = \sqrt{3}$, $(\widehat{\mathbf{m}, \mathbf{n}}) = \frac{\pi}{6}$.
4. Найти $\text{pr}_{\mathbf{y}} \mathbf{x}$, при $\mathbf{x} = \mathbf{b}$ и $\mathbf{y} = 3\mathbf{a} + 2\mathbf{c}$, где $\mathbf{a}(-5; -6; 4)$, $\mathbf{b}(-2; -2; 1)$, $\mathbf{c}(6; 7; -6)$.
5. Найти координаты единичного вектора \mathbf{n}_0 , перпендикулярного плоскости $\triangle ABC$, где $A(7; 3; 7)$, $B(0; 4; 8)$, $C(-1; 4; 9)$.
6. Вычислить площадь треугольника, построенного на векторах $\mathbf{a} = -2\mathbf{m} - 3\mathbf{n}$ и $\mathbf{b} = \mathbf{m} + 3\mathbf{n}$ при $|\mathbf{m}| = 4$, $|\mathbf{n}| = 3$, $(\widehat{\mathbf{m}, \mathbf{n}}) = \frac{2\pi}{3}$.
7. Компланарны ли векторы $\mathbf{a}(0; -1; 1)$, $\mathbf{b}(-3; -4; 7)$, $\mathbf{c}(-1; 0; 1)$?
8. Вычислить объем тетраэдра с вершинами в точках A_1, A_2, A_3, A_4 , площадь грани $A_1 A_2 A_4$ и высоту, опущенную на эту грань из вершины A_3 . $A_1(7; -6; 4)$, $A_2(2; -6; 5)$, $A_3(10; -4; 7)$, $A_4(1; -7; 4)$.
9. Найти косинус острого угла между плоскостями $\alpha : 2x + 3z + 6 = 0$ и $\beta : 2x - 3y + z = -1$.
10. Составить уравнение плоскости, проходящей через точки $A(-2; -1; -7)$, $B(-1; -2; -11)$, $C(-1; -4; -10)$, и найти расстояние от точки $S(4; 3; 2)$ до этой плоскости.
11. Составить уравнение плоскости π , проходящей через точку $M(0; 9; 2)$ параллельно прямой $\frac{x-3}{1} = \frac{y-1}{1} = \frac{z+5}{-1}$ и перпендикулярно плоскости $6x + y + 3 = 0$.
12. Составить уравнение прямой AB и найти расстояние от точки C до этой прямой, если $A(8; 2; 1)$, $B(7; 1; 3)$, $C(6; -1; 6)$.
13. Привести к каноническому виду общие уравнения прямой
$$\begin{cases} 5x + 5y + 2z + 28 = 0 \\ 2x + y + z + 6 = 0 \end{cases}.$$
14. Найти проекцию точки $M(-25; -10; 7)$ на плоскость $9x + 6y - 4z - 86 = 0$.
15. Найти угол между прямой $l : \frac{x-2}{-2} = \frac{y-4}{-2} = \frac{z+8}{1}$ и плоскостью $\pi : -4x - y + 2z + 9 = 0$.

Вариант 23.

1. В параллелепипеде $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ $\overline{AB} = \mathbf{a}$, $\overline{AD} = \mathbf{b}$, $\overline{AA_1} = \mathbf{c}$. Выразить через \mathbf{a} , \mathbf{b} , \mathbf{c} вектор $\mathbf{q} = \overline{KM}$, где K – середина ребра AB , а M делит ребро $B_1 C_1$ в отношении 3 : 2.
2. Доказать, что векторы $\mathbf{a}(1; 1; 2)$, $\mathbf{b}(3; 2; 4)$, $\mathbf{c}(-3; -3; -5)$ образуют базис. Разложить вектор $\mathbf{d}(2; 3; 3)$ по этим векторам.
3. Найти косинус угла между векторами $\mathbf{a} = -2\mathbf{m} - 2\mathbf{n}$ и $\mathbf{b} = -\mathbf{m} + 2\mathbf{n}$ при $|\mathbf{m}| = 2$, $|\mathbf{n}| = 1$, $(\widehat{\mathbf{m}, \mathbf{n}}) = \frac{2\pi}{3}$.
4. Найти $\text{pr}_{\mathbf{y}} \mathbf{x}$, при $\mathbf{x} = \mathbf{a}$ и $\mathbf{y} = \mathbf{b} + \mathbf{c}$, где $\mathbf{a}(-2; -3; 4)$, $\mathbf{b}(3; 4; -7)$, $\mathbf{c}(-5; -10; 7)$.
5. Найти координаты единичного вектора \mathbf{n}_0 , перпендикулярного плоскости $\triangle ABC$, где $A(6; 5; 5)$, $B(5; 1; 5)$, $C(9; 8; 4)$.
6. Вычислить площадь треугольника, построенного на векторах $\mathbf{a} = \mathbf{m} + \mathbf{n}$ и $\mathbf{b} = -\mathbf{m} + 3\mathbf{n}$ при $|\mathbf{m}| = 3$, $|\mathbf{n}| = 4$, $(\widehat{\mathbf{m}, \mathbf{n}}) = \frac{\pi}{3}$.
7. Лежат ли точки $A(8; 6; 9)$, $B(9; 6; 10)$, $C(0; 5; 3)$, $D(17; 7; 16)$ в одной плоскости?
8. Вычислить объем тетраэдра с вершинами в точках A, B, C, D , площадь грани BCD и высоту, опущенную на эту грань из вершины A . $A(-2; -9; -2)$, $B(0; -7; -1)$, $C(9; -16; -6)$, $D(5; -2; 2)$.
9. Найти косинус острого угла между плоскостями $\alpha : 2x + 2y + z = -4$ и $\beta : 3x - z = 0$.
10. Задана пирамида $SABC$ координатами вершин $A(9; 9; 10)$, $B(6; 10; 10)$, $C(8; 7; 11)$, $S(-5; -5; 4)$:
а) составить уравнение плоскости ABC ,
б) найти расстояние от вершины S до плоскости ABC .
11. Составить уравнение плоскости π , проходящей через точку $M(3; -4; -7)$ перпендикулярно плоскостям $x + 8y - z = -2$ и $x + y = 6$.
12. Составить уравнение прямой AB и найти расстояние от точки C до этой прямой, если $A(0; 5; 0)$, $B(-3; 10; -1)$, $C(-5; 13; -2)$.
13. Привести к каноническому виду общие уравнения прямой
$$\begin{cases} 5x + y - z - 21 = 0 \\ 4x + y - z - 22 = 0 \end{cases}.$$
14. Найти проекцию точки $M(-2; 12; -18)$ на плоскость $3x + 2y - 10z = -28$.
15. Найти угол между прямой $l : \frac{x}{6} = \frac{y-7}{4} = \frac{z+5}{-2}$ и плоскостью $\pi : -x + y + z = 0$.

Вариант 24.

1. В параллелепипеде $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ $\overline{AB} = \mathbf{a}$, $\overline{AD} = \mathbf{b}$, $\overline{AA_1} = \mathbf{c}$. Выразить через \mathbf{a} , \mathbf{b} , \mathbf{c} вектор $\mathbf{q} = \overline{KM}$, где K – середина ребра BC , а M делит ребро DD_1 в отношении 1 : 2.
2. Доказать, что векторы $\mathbf{a}(5; -3; 5)$, $\mathbf{b}(-2; 3; 0)$, $\mathbf{c}(4; -1; 6)$ образуют базис. Разложить вектор $\mathbf{d}(6; -5; 4)$ по этим векторам.
3. Найти косинус угла между векторами $\mathbf{a} = -\mathbf{m} + 2\mathbf{n}$ и $\mathbf{b} = -\mathbf{m} - 4\mathbf{n}$ при $|\mathbf{m}| = 2$, $|\mathbf{n}| = 1$, $(\widehat{\mathbf{m}, \mathbf{n}}) = \frac{2\pi}{3}$.
4. Найти $\text{pr}_{\mathbf{y}} \mathbf{x}$, при $\mathbf{x} = \mathbf{a}$ и $\mathbf{y} = \mathbf{b} + 3\mathbf{c}$, где $\mathbf{a}(-5; -6; -2)$, $\mathbf{b}(-3; 3; -8)$, $\mathbf{c}(1; 1; 3)$.
5. Найти координаты единичного вектора \mathbf{n}_0 , перпендикулярного плоскости $\triangle ABC$, где $A(5; 2; 9)$, $B(7; 3; 7)$, $C(6; 1; 12)$.
6. Вычислить площадь треугольника, построенного на векторах $\mathbf{a} = -4\mathbf{m} - \mathbf{n}$ и $\mathbf{b} = 3\mathbf{m} + 4\mathbf{n}$ при $|\mathbf{m}| = 4$, $|\mathbf{n}| = 2$, $(\widehat{\mathbf{m}, \mathbf{n}}) = \frac{3\pi}{4}$.
7. Лежат ли точки $A(2; 6; 4)$, $B(8; -1; -1)$, $C(-5; 14; 10)$, $D(1; 7; 5)$ в одной плоскости?
8. Вычислить объем параллелепипеда $ABCDEFGH$, площадь грани $ABCD$ и высоту, опущенную на эту грань из вершины E . $A(-5; -2; 6)$, $B(-2; -1; 1)$, $D(-7; -5; 15)$, $E(-6; -3; 9)$.
9. Найти косинус острого угла между плоскостями $\alpha : y + 2z - 11 = 0$ и $\beta : 3x - 2y - 3z = 15$.
10. Задана пирамида $SABC$ координатами вершин $A(9; -10; -9)$, $B(13; -9; -9)$, $C(8; -9; -8)$, $S(0; -7; -4)$:
 а) составить уравнение плоскости ABC ,
 б) найти расстояние от вершины S до плоскости ABC .
11. Составить уравнение плоскости π , проходящей через точку $M(8; 7; 10)$ перпендикулярно плоскостям $2x - 3y + z = -4$ и $x - 2y + z = -4$.
12. Составить уравнение прямой AB и найти расстояние от точки C до этой прямой, если $A(9; 4; 0)$, $B(6; 3; -4)$, $C(13; 5; 5)$.
13. Привести к каноническому виду общие уравнения прямой

$$\begin{cases} 5x + 7y + z - 24 = 0 \\ 4x + 5y + z - 17 = 0 \end{cases}.$$
14. Найти проекцию точки $M(12; -7; 2)$ на плоскость $x - 3y - z = 9$.
15. Найти угол между прямой $l : \frac{x-3}{3} = \frac{y-8}{-4} = \frac{z-5}{-1}$ и плоскостью $\pi : x - y + z = 7$.

Вариант 25.

1. В параллелепипеде $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ $\overline{AB} = \mathbf{a}$, $\overline{AD} = \mathbf{b}$, $\overline{AA_1} = \mathbf{c}$. Выразить через \mathbf{a} , \mathbf{b} , \mathbf{c} вектор $\mathbf{q} = \overline{KM}$, где K – середина ребра BB_1 , а M делит ребро DC в отношении 1 : 2.
2. Доказать, что векторы $\mathbf{a}(-3; 4; -6)$, $\mathbf{b}(1; 2; -3)$, $\mathbf{c}(-1; 3; -5)$ образуют базис. Разложить вектор $\mathbf{d}(4; 3; -3)$ по этим векторам.
3. Найти косинус угла между векторами $\mathbf{a} = -\mathbf{m} + 3\mathbf{n}$ и $\mathbf{b} = \mathbf{m} + 2\mathbf{n}$ при $|\mathbf{m}| = 2$, $|\mathbf{n}| = \sqrt{2}$, $(\widehat{\mathbf{m}, \mathbf{n}}) = \frac{3\pi}{4}$.
4. Найти $\text{pr}_{\mathbf{y}} \mathbf{x}$, при $\mathbf{x} = \mathbf{a} + 3\mathbf{c}$ и $\mathbf{y} = \mathbf{b}$, где $\mathbf{a}(5; 8; -1)$, $\mathbf{b}(-3; -3; 5)$, $\mathbf{c}(-1; -1; 2)$.
5. Найти координаты единичного вектора \mathbf{n}_0 , перпендикулярного плоскости $\triangle ABC$, где $A(5; 0; 4)$, $B(6; 1; 5)$, $C(7; 10; 7)$.
6. Вычислить площадь треугольника, построенного на векторах $\mathbf{a} = -2\mathbf{m} - 3\mathbf{n}$ и $\mathbf{b} = 2\mathbf{m} + 2\mathbf{n}$ при $|\mathbf{m}| = 2$, $|\mathbf{n}| = 5$, $(\widehat{\mathbf{m}, \mathbf{n}}) = \frac{\pi}{4}$.
7. Компланарны ли векторы \overline{AB} , \overline{AC} , \overline{AD} , где $A(7; 6; 2)$, $B(8; 15; 5)$, $C(4; -2; 2)$, $D(10; 15; 3)$?
8. Вычислить объем параллелепипеда $ABCDEFGH$, площадь грани $ABCD$ и высоту, опущенную на эту грань из вершины E . $A(-9; -7; -9)$, $B(-13; -4; -6)$, $D(-9; -9; -10)$, $E(-6; -8; -10)$.
9. Найти косинус острого угла между плоскостями $\alpha : -y + z - 1 = 0$ и $\beta : -8x - 2y + z = 8$.
10. Задана пирамида $SABC$ координатами вершин $A(2; 0; -1)$, $B(3; -1; 3)$, $C(4; -1; 4)$, $S(1; -4; 7)$:
а) составить уравнение плоскости ABC ,
б) найти расстояние от вершины S до плоскости ABC .
11. Составить уравнение плоскости π , проходящей через точку $M(-1; -9; -9)$ параллельно прямой $\frac{x+5}{-6} = \frac{y-1}{2} = \frac{z+2}{1}$ и перпендикулярно плоскости $-x - y - 5 = 0$.
12. Составить уравнение прямой AB и найти расстояние от точки C до этой прямой, если $A(7; 6; 7)$, $B(16; 11; 11)$, $C(5; 5; 6)$.
13. Привести к каноническому виду общие уравнения прямой

$$\begin{cases} 2x + y + 2z + 3 = 0 \\ 3x + 2y + z + 5 = 0 \end{cases}.$$
14. Найти проекцию точки $M(-29; 4; -2)$ на плоскость $-5x - y + z - 31 = 0$.
15. Найти угол между прямой $l : \frac{x+1}{-1} = \frac{y+5}{1} = \frac{z+6}{1}$ и плоскостью $\pi : 4x - y - 4z + 6 = 0$.

Вариант 26.

1. В параллелепипеде $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ $\overline{AB} = \mathbf{a}$, $\overline{AD} = \mathbf{b}$, $\overline{AA_1} = \mathbf{c}$. Выразить через \mathbf{a} , \mathbf{b} , \mathbf{c} вектор $\mathbf{q} = \overline{KM}$, где K – середина ребра DC , а M делит ребро $A_1 D_1$ в отношении 3 : 1.
2. Доказать, что векторы $\mathbf{a}(5; 2; 1)$, $\mathbf{b}(-3; -1; -2)$, $\mathbf{c}(1; 0; 2)$ образуют базис. Разложить вектор $\mathbf{d}(-9; -3; -4)$ по этим векторам.
3. Найти косинус угла между векторами $\mathbf{a} = \mathbf{m} + 4\mathbf{n}$ и $\mathbf{b} = 2\mathbf{m} + 6\mathbf{n}$ при $|\mathbf{m}| = 2\sqrt{2}$, $|\mathbf{n}| = 1$, $(\widehat{\mathbf{m}, \mathbf{n}}) = \frac{3\pi}{4}$.
4. Найти $\text{pr}_{\mathbf{y}} \mathbf{x}$, при $\mathbf{x} = \mathbf{a}$ и $\mathbf{y} = \mathbf{b} + \mathbf{c}$, где $\mathbf{a}(-4; -7; -7)$, $\mathbf{b}(1; 2; 2)$, $\mathbf{c}(-1; -1; 4)$.
5. Найти координаты единичного вектора \mathbf{n}_0 , перпендикулярного плоскости $\triangle ABC$, где $A(3; 6; 8)$, $B(4; 7; 9)$, $C(4; 9; 12)$.
6. Вычислить площадь параллелограмма, построенного на векторах $\mathbf{a} = 3\mathbf{m} - \mathbf{n}$ и $\mathbf{b} = -3\mathbf{m} - 3\mathbf{n}$ при $|\mathbf{m}| = 1$, $|\mathbf{n}| = 1$, $(\widehat{\mathbf{m}, \mathbf{n}}) = \frac{\pi}{6}$.
7. Компланарны ли векторы $\mathbf{a}(1; 4; -5)$, $\mathbf{b}(-1; -3; 4)$, $\mathbf{c}(-1; -5; 6)$?
8. Вычислить объем тетраэдра с вершинами в точках A_1, A_2, A_3, A_4 , площадь грани $A_1 A_2 A_3$ и высоту, опущенную на эту грань из вершины A_4 . $A_1(1; 2; 0)$, $A_2(-8; 7; -5)$, $A_3(3; -1; -1)$, $A_4(-3; 5; -1)$.
9. Найти косинус острого угла между плоскостями $\alpha : 7x - 2y + 4z = 1$ и $\beta : -y - z + 12 = 0$.
10. Задана пирамида $SABC$ координатами вершин $A(0; 1; -7)$, $B(1; -1; -3)$, $C(1; 0; -6)$, $S(-5; 7; 1)$:
а) составить уравнение плоскости ABC ,
б) найти расстояние от вершины S до плоскости ABC .
11. Составить канонические уравнения прямой, проходящей через точку $M(6; 9; -4)$ параллельно плоскости $-4x + y + z = 2$ и перпендикулярно прямой $\frac{x+8}{-5} = \frac{y+6}{1} = \frac{z-4}{2}$.
12. Составить уравнение прямой AB и найти расстояние от точки C до этой прямой, если $A(8; 3; 1)$, $B(-1; 5; 8)$, $C(12; 2; -2)$.
13. Привести к каноническому виду общие уравнения прямой

$$\begin{cases} 7x + y - 19 = 0 \\ 5x + 2y + z - 27 = 0 \end{cases}.$$
14. Найти координаты точки M_1 , симметричной точке $M(-2; -5; -4)$ относительно плоскости $-x - 9y - 6 = 0$.
15. Найти угол между прямой $l : \frac{x+6}{3} = \frac{y-2}{1} = \frac{z-6}{1}$ и плоскостью $\pi : -3x + 2y - 2z = 7$.

Вариант 27.

1. В параллелепипеде $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ $\overline{AB} = \mathbf{a}$, $\overline{AD} = \mathbf{b}$, $\overline{AA_1} = \mathbf{c}$. Выразить через \mathbf{a} , \mathbf{b} , \mathbf{c} вектор $\mathbf{q} = \overline{KM}$, где K – середина ребра AD , а M делит ребро $D_1 C_1$ в отношении 3 : 1.
2. Доказать, что векторы $\mathbf{a}(1; -3; -5)$, $\mathbf{b}(-5; 4; 6)$, $\mathbf{c}(-2; 3; 5)$ образуют базис. Разложить вектор $\mathbf{d}(2; 1; 3)$ по этим векторам.
3. Найти косинус угла между векторами $\mathbf{a} = 5\mathbf{m} - 2\mathbf{n}$ и $\mathbf{b} = -\mathbf{m} + \mathbf{n}$ при $|\mathbf{m}| = 2$, $|\mathbf{n}| = 2\sqrt{3}$, $(\widehat{\mathbf{m}, \mathbf{n}}) = \frac{\pi}{6}$.
4. Найти $\text{pr}_{\mathbf{y}} \mathbf{x}$, при $\mathbf{x} = 2\mathbf{a} + \mathbf{c}$ и $\mathbf{y} = \mathbf{b}$, где $\mathbf{a}(-1; 2; 7)$, $\mathbf{b}(5; -1; -4)$, $\mathbf{c}(1; -4; -12)$.
5. Найти координаты единичного вектора \mathbf{n}_0 , перпендикулярного плоскости $\triangle ABC$, где $A(0; 8; 4)$, $B(-1; 9; 3)$, $C(-2; 9; 9)$.
6. Вычислить площадь параллелограмма, построенного на векторах $\mathbf{a} = -\mathbf{m} + 3\mathbf{n}$ и $\mathbf{b} = -2\mathbf{m} + 4\mathbf{n}$ при $|\mathbf{m}| = 4$, $|\mathbf{n}| = 3$, $(\widehat{\mathbf{m}, \mathbf{n}}) = \frac{5\pi}{6}$.
7. Компланарны ли векторы $\mathbf{a}(1; 3; 5)$, $\mathbf{b}(-1; 0; 1)$, $\mathbf{c}(1; -1; -3)$?
8. Вычислить объем параллелепипеда $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$, площадь грани $ABCD$ и высоту, опущенную на эту грань из вершины A_1 . $A(4; -7; -8)$, $B(-1; 0; -10)$, $D(-1; -4; -10)$, $A_1(6; -5; -7)$.
9. Найти косинус острого угла между плоскостями $\alpha : -x - 2y - z = 13$ и $\beta : 4x + 3y + 4 = 0$.
10. Составить уравнение плоскости, проходящей через точки $A(-2; 10; -1)$, $B(3; 13; -8)$, $C(1; 12; -7)$, и найти расстояние от точки $S(1; -3; -8)$ до этой плоскости.
11. Составить уравнение плоскости π , проходящей через точку $M(5; 7; 5)$ перпендикулярно плоскостям $x - 2y - 3z - 7 = 0$ и $x + y + z - 6 = 0$.
12. Составить уравнение прямой AB и найти расстояние от точки C до этой прямой, если $A(1; 0; 3)$, $B(2; -2; 4)$, $C(2; -1; 3)$.
13. Привести к каноническому виду общие уравнения прямой

$$\begin{cases} -x + 2y + 7z + 11 = 0 \\ -x + y + 8z + 20 = 0 \end{cases}.$$
14. Найти проекцию точки $M(26; 11; -4)$ на плоскость $-8x - 3y - 2z + 79 = 0$.
15. Найти угол между прямой $l : \frac{x-6}{1} = \frac{y-5}{1} = \frac{z}{1}$ и плоскостью $\pi : -3x - y + 5z = 11$.

Вариант 28.

1. В параллелепипеде $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ $\overline{AB} = \mathbf{a}$, $\overline{AD} = \mathbf{b}$, $\overline{AA_1} = \mathbf{c}$. Выразить через \mathbf{a} , \mathbf{b} , \mathbf{c} вектор $\mathbf{q} = \overline{KM}$, где K – середина ребра DC , а M делит ребро BB_1 в отношении $2 : 3$.
2. Доказать, что векторы $\mathbf{a}(-4; 5; 1)$, $\mathbf{b}(-5; 5; 2)$, $\mathbf{c}(1; 1; -2)$ образуют базис. Разложить вектор $\mathbf{d}(-7; 6; 3)$ по этим векторам.
3. Найти косинус угла между векторами $\mathbf{a} = -6\mathbf{m} - 3\mathbf{n}$ и $\mathbf{b} = -2\mathbf{m} - 2\mathbf{n}$ при $|\mathbf{m}| = \sqrt{3}$, $|\mathbf{n}| = 2$, $(\widehat{\mathbf{m}, \mathbf{n}}) = \frac{5\pi}{6}$.
4. Найти $\text{pr}_{\mathbf{y}} \mathbf{x}$, при $\mathbf{x} = 2\mathbf{b} + 2\mathbf{c}$ и $\mathbf{y} = \mathbf{a}$, где $\mathbf{a}(5; 5; 1)$, $\mathbf{b}(-4; -3; -3)$, $\mathbf{c}(4; 3; 2)$.
5. Найти координаты единичного вектора \mathbf{n}_0 , перпендикулярного плоскости $\triangle ABC$, где $A(0; 8; 0)$, $B(1; 9; 3)$, $C(2; 11; 1)$.
6. Вычислить площадь треугольника, построенного на векторах $\mathbf{a} = 2\mathbf{m} + 2\mathbf{n}$ и $\mathbf{b} = 2\mathbf{m} + 4\mathbf{n}$ при $|\mathbf{m}| = 2$, $|\mathbf{n}| = 3$, $(\widehat{\mathbf{m}, \mathbf{n}}) = \frac{5\pi}{6}$.
7. Компланарны ли векторы \overline{AB} , \overline{AC} , \overline{AD} , где $A(8; 4; 2)$, $B(11; 3; 0)$, $C(3; 6; 5)$, $D(12; 3; -1)$?
8. Вычислить объем тетраэдра с вершинами в точках A_1, A_2, A_3, A_4 , площадь грани $A_1 A_2 A_3$ и высоту, опущенную на эту грань из вершины A_4 . $A_1(-1; -2; -6)$, $A_2(2; -4; -4)$, $A_3(0; 1; -7)$, $A_4(-11; 5; -12)$.
9. Найти косинус острого угла между плоскостями $\alpha : -x - y - 12 = 0$ и $\beta : -7x - y + 4z = -6$.
10. Задана пирамида $SABC$ координатами вершин $A(-7; -4; 10)$, $B(-6; -5; 9)$, $C(-9; -1; 8)$, $S(-7; 6; 4)$:
 а) составить уравнение плоскости ABC ,
 б) найти расстояние от вершины S до плоскости ABC .
11. Составить уравнение плоскости π , проходящей через точку $M(-7; 2; 6)$ перпендикулярно плоскостям $x + 4y + 2z - 8 = 0$ и $x + 7y + 3z = 0$.
12. Составить уравнение прямой AB и найти расстояние от точки C до этой прямой, если $A(4; 3; 0)$, $B(6; -2; -3)$, $C(5; 1; -1)$.
13. Привести к каноническому виду общие уравнения прямой

$$\begin{cases} -5x + 3y - 2z + 7 = 0 \\ -3x + 2y - z + 1 = 0 \end{cases}$$
14. Найти координаты точки M_1 , симметричной точке $M(10; -8; -6)$ относительно плоскости $-5x + 7y + 4z - 5 = 0$.
15. Найти угол между прямой $l : \frac{x-2}{1} = \frac{y-4}{4} = \frac{z+3}{-3}$ и плоскостью $\pi : -2x + y + z + 11 = 0$.

Вариант 29.

1. В параллелепипеде $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ $\overline{AB} = \mathbf{a}$, $\overline{AD} = \mathbf{b}$, $\overline{AA_1} = \mathbf{c}$. Выразить через \mathbf{a} , \mathbf{b} , \mathbf{c} вектор $\mathbf{q} = \overline{KM}$, где K – середина ребра DC , а M делит ребро AA_1 в отношении 3 : 2.
2. Доказать, что векторы $\mathbf{a}(-1; 0; 2)$, $\mathbf{b}(-4; 3; 4)$, $\mathbf{c}(-3; 4; 1)$ образуют базис. Разложить вектор $\mathbf{d}(-3; 3; 2)$ по этим векторам.
3. Найти косинус угла между векторами $\mathbf{a} = 2\mathbf{m} + \mathbf{n}$ и $\mathbf{b} = \mathbf{m} + 3\mathbf{n}$ при $|\mathbf{m}| = \sqrt{3}$, $|\mathbf{n}| = 2$, $(\widehat{\mathbf{m}, \mathbf{n}}) = \frac{5\pi}{6}$.
4. Найти $\text{pr}_{\mathbf{y}} \mathbf{x}$, при $\mathbf{x} = \mathbf{a}$ и $\mathbf{y} = 3\mathbf{b} + \mathbf{c}$, где $\mathbf{a}(-2; -1; 7)$, $\mathbf{b}(-1; -1; 4)$, $\mathbf{c}(-3; 3; -7)$.
5. Найти координаты единичного вектора \mathbf{n}_0 , перпендикулярного плоскости $\triangle ABC$, где $A(7; 1; 6)$, $B(6; 2; 4)$, $C(9; 3; 9)$.
6. Вычислить площадь параллелограмма, построенного на векторах $\mathbf{a} = 2\mathbf{m} - \mathbf{n}$ и $\mathbf{b} = -\mathbf{m} - 2\mathbf{n}$ при $|\mathbf{m}| = 5$, $|\mathbf{n}| = 1$, $(\widehat{\mathbf{m}, \mathbf{n}}) = \frac{\pi}{6}$.
7. Лежат ли точки $A(9; 2; 5)$, $B(10; 1; 5)$, $C(8; 4; 4)$, $D(3; 7; 6)$ в одной плоскости?
8. Вычислить объем тетраэдра с вершинами в точках A, B, C, D , площадь грани ACD и высоту, опущенную на эту грань из вершины B . $A(-1; 9; -8)$, $B(1; 4; -10)$, $C(4; 11; -7)$, $D(-6; 13; -6)$.
9. Найти косинус острого угла между плоскостями $\alpha : -2x + y - 14 = 0$ и $\beta : -5x - 3y - z = 11$.
10. Задана пирамида $SABC$ координатами вершин $A(6; 3; 7)$, $B(10; 12; 4)$, $C(9; 8; 5)$, $S(0; -6; 0)$:
а) составить уравнение плоскости ABC ,
б) найти расстояние от вершины S до плоскости ABC .
11. Составить канонические уравнения прямой, проходящей через точку $M(-10; -7; 1)$ параллельно плоскости $x - 2y - z + 5 = 0$ и перпендикулярно прямой $\frac{x+1}{1} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z+6}{-2}$.
12. Составить уравнение прямой AB и найти расстояние от точки C до этой прямой, если $A(7; 1; 1)$, $B(5; -2; 0)$, $C(8; 2; 1)$.
13. Привести к каноническому виду общие уравнения прямой

$$\begin{cases} -3x + y + 3 = 0 \\ -7x + y + z + 23 = 0 \end{cases}.$$
14. Найти координаты точки M_1 , симметричной точке $M(3; -4; -5)$ относительно плоскости $7y + 3z = -14$.
15. Найти угол между прямой $l : \frac{x-8}{-1} = \frac{y-3}{-3} = \frac{z+2}{4}$ и плоскостью $\pi : 2x - y - z - 14 = 0$.

Вариант 30.

1. В параллелепипеде $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ $\overline{AB} = \mathbf{a}$, $\overline{AD} = \mathbf{b}$, $\overline{AA_1} = \mathbf{c}$. Выразить через \mathbf{a} , \mathbf{b} , \mathbf{c} вектор $\mathbf{q} = \overline{KM}$, где K – середина ребра $A_1 B_1$, а M делит ребро AD в отношении $2 : 1$.
2. Доказать, что векторы $\mathbf{a}(-3; 2; -1)$, $\mathbf{b}(4; -3; 1)$, $\mathbf{c}(-6; 4; -3)$ образуют базис. Разложить вектор $\mathbf{d}(9; -7; 1)$ по этим векторам.
3. Найти косинус угла между векторами $\mathbf{a} = -2\mathbf{m} - 2\mathbf{n}$ и $\mathbf{b} = -4\mathbf{m} - 3\mathbf{n}$ при $|\mathbf{m}| = 2$, $|\mathbf{n}| = \sqrt{3}$, $(\widehat{\mathbf{m}, \mathbf{n}}) = \frac{5\pi}{6}$.
4. Найти $\text{pr}_{\mathbf{y}} \mathbf{x}$, при $\mathbf{x} = \mathbf{a} + 3\mathbf{c}$ и $\mathbf{y} = \mathbf{b}$, где $\mathbf{a}(3; -5; -5)$, $\mathbf{b}(1; 1; -3)$, $\mathbf{c}(1; 2; 3)$.
5. Найти координаты единичного вектора \mathbf{n}_0 , перпендикулярного плоскости $\triangle ABC$, где $A(8; 5; 1)$, $B(11; 11; 0)$, $C(3; -2; 3)$.
6. Вычислить площадь треугольника, построенного на векторах $\mathbf{a} = 2\mathbf{m} + 2\mathbf{n}$ и $\mathbf{b} = -4\mathbf{m} - 3\mathbf{n}$ при $|\mathbf{m}| = 3$, $|\mathbf{n}| = 3$, $(\widehat{\mathbf{m}, \mathbf{n}}) = \frac{\pi}{4}$.
7. Компланарны ли векторы $\mathbf{a}(-1; 9; -10)$, $\mathbf{b}(1; -8; 9)$, $\mathbf{c}(0; 1; -1)$?
8. Вычислить объем тетраэдра с вершинами в точках A_1, A_2, A_3, A_4 , площадь грани $A_1 A_2 A_3$ и высоту, опущенную на эту грань из вершины A_4 . $A_1(3; 9; 6)$, $A_2(1; 11; 1)$, $A_3(4; 12; 3)$, $A_4(5; 6; 12)$.
9. Найти косинус острого угла между плоскостями $\alpha : 4x + 2y - z = 12$ и $\beta : -x + 2z + 8 = 0$.
10. Задана пирамида $SABC$ координатами вершин $A(3; -10; -4)$, $B(-1; -15; 3)$, $C(4; -8; -6)$, $S(-7; 6; -2)$:
 - а) составить уравнение плоскости ABC ,
 - б) найти расстояние от вершины S до плоскости ABC .
11. Составить уравнение плоскости π , проходящей через точку $M(-4; 0; 10)$ параллельно прямой $\frac{x-1}{-1} = \frac{y-2}{5} = \frac{z-3}{-2}$ и перпендикулярно плоскости $x - 2y + z = -1$.
12. Составить уравнение прямой AB и найти расстояние от точки C до этой прямой, если $A(1; 7; 2)$, $B(-2; 6; 0)$, $C(-4; 5; -1)$.
13. Привести к каноническому виду общие уравнения прямой
$$\begin{cases} 3x + y - z + 7 = 0 \\ 2x + 3y - 2z - 27 = 0 \end{cases}.$$
14. Найти проекцию точки $M(17; 15; 11)$ на плоскость $8x + 5y + 6z - 27 = 0$.
15. Найти угол между прямой $l : \frac{x-2}{1} = \frac{y+8}{2} = \frac{z-4}{-5}$ и плоскостью $\pi : -2x - y - z = -1$.

Вариант 31.

1. В параллелепипеде $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ $\overline{AB} = \mathbf{a}$, $\overline{AD} = \mathbf{b}$, $\overline{AA_1} = \mathbf{c}$. Выразить через \mathbf{a} , \mathbf{b} , \mathbf{c} вектор $\mathbf{q} = \overline{KM}$, где K – середина ребра AA_1 , а M делит ребро $D_1 C_1$ в отношении 2 : 3.
2. Доказать, что векторы $\mathbf{a}(-1; -1; -2)$, $\mathbf{b}(1; 2; 1)$, $\mathbf{c}(-5; -5; -6)$ образуют базис. Разложить вектор $\mathbf{d}(6; 1; 9)$ по этим векторам.
3. Найти косинус угла между векторами $\mathbf{a} = \mathbf{m} - 3\mathbf{n}$ и $\mathbf{b} = \mathbf{m} - 2\mathbf{n}$ при $|\mathbf{m}| = 2$, $|\mathbf{n}| = 1$, $(\widehat{\mathbf{m}, \mathbf{n}}) = \frac{\pi}{3}$.
4. Найти $\text{pr}_{\mathbf{y}} \mathbf{x}$, при $\mathbf{x} = \mathbf{a} + \mathbf{c}$ и $\mathbf{y} = \mathbf{b}$, где $\mathbf{a}(-6; -2; 1)$, $\mathbf{b}(-2; -3; -6)$, $\mathbf{c}(1; 3; 2)$.
5. Найти координаты единичного вектора \mathbf{n}_0 , перпендикулярного плоскости $\triangle ABC$, где $A(3; 6; 7)$, $B(5; 7; 11)$, $C(4; 7; 10)$.
6. Вычислить площадь треугольника, построенного на векторах $\mathbf{a} = \mathbf{m} + \mathbf{n}$ и $\mathbf{b} = 3\mathbf{m} + 4\mathbf{n}$ при $|\mathbf{m}| = 2$, $|\mathbf{n}| = 3$, $(\widehat{\mathbf{m}, \mathbf{n}}) = \frac{\pi}{4}$.
7. Компланарны ли векторы $\mathbf{a}(3; 2; 3)$, $\mathbf{b}(1; -3; -5)$, $\mathbf{c}(0; -1; -2)$?
8. Вычислить объем параллелепипеда $ABCDEFGH$, площадь грани $ABCD$ и высоту, опущенную на эту грань из вершины E . $A(-8; 6; -3)$, $B(-10; 1; 0)$, $D(-7; 8; -4)$, $E(-10; 2; 0)$.
9. Найти косинус острого угла между плоскостями $\alpha : -x - y - z = -4$ и $\beta : -4y - 7z + 4 = 0$.
10. Составить уравнение плоскости, проходящей через точки $A(-10; 2; 1)$, $B(-11; -3; 0)$, $C(-8; 8; 2)$, и найти расстояние от точки $S(7; 4; 5)$ до этой плоскости.
11. Составить канонические уравнения прямой, проходящей через точку $M(-9; 10; 7)$ параллельно плоскости $-2x - y - 3z - 1 = 0$ и перпендикулярно прямой $\frac{x+8}{3} = \frac{y+1}{1} = \frac{z+3}{1}$.
12. Составить уравнение прямой AB и найти расстояние от точки C до этой прямой, если $A(3; 6; 6)$, $B(1; 5; 6)$, $C(0; 4; 7)$.
13. Привести к каноническому виду общие уравнения прямой

$$\begin{cases} -5x + y - 9 = 0 \\ 3x + y + z - 2 = 0 \end{cases}.$$
14. Найти координаты точки M_1 , симметричной точке $M(7; -13; -6)$ относительно плоскости $-5x + 8y + z = -10$.
15. Найти угол между прямой $l : \frac{x+7}{-1} = \frac{y-8}{-5} = \frac{z+1}{-2}$ и плоскостью $\pi : x - 2y - z - 3 = 0$.

Вариант 32.

1. В параллелепипеде $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ $\overline{AB} = \mathbf{a}$, $\overline{AD} = \mathbf{b}$, $\overline{AA_1} = \mathbf{c}$. Выразить через \mathbf{a} , \mathbf{b} , \mathbf{c} вектор $\mathbf{q} = \overline{KM}$, где K – середина ребра $B_1 C_1$, а M делит ребро DC в отношении 3 : 1.
2. Доказать, что векторы $\mathbf{a}(2; 3; 5)$, $\mathbf{b}(-1; -4; -4)$, $\mathbf{c}(-2; -1; -3)$ образуют базис. Разложить вектор $\mathbf{d}(3; 3; 5)$ по этим векторам.
3. Найти косинус угла между векторами $\mathbf{a} = -2\mathbf{m} + \mathbf{n}$ и $\mathbf{b} = -5\mathbf{m} + \mathbf{n}$ при $|\mathbf{m}| = 1$, $|\mathbf{n}| = 2$, $(\widehat{\mathbf{m}, \mathbf{n}}) = \frac{\pi}{3}$.
4. Найти $\text{pr}_{\mathbf{y}} \mathbf{x}$, при $\mathbf{x} = 2\mathbf{a} + \mathbf{c}$ и $\mathbf{y} = \mathbf{b}$, где $\mathbf{a}(-3; -7; 4)$, $\mathbf{b}(2; 4; -3)$, $\mathbf{c}(2; 14; -13)$.
5. Найти координаты единичного вектора \mathbf{n}_0 , перпендикулярного плоскости $\triangle ABC$, где $A(5; 5; 2)$, $B(3; 7; 1)$, $C(10; 4; 3)$.
6. Вычислить площадь параллелограмма, построенного на векторах $\mathbf{a} = -4\mathbf{m} - 3\mathbf{n}$ и $\mathbf{b} = -3\mathbf{m} + 2\mathbf{n}$ при $|\mathbf{m}| = 3$, $|\mathbf{n}| = 4$, $(\widehat{\mathbf{m}, \mathbf{n}}) = \frac{2\pi}{3}$.
7. Компланарны ли векторы \overline{AB} , \overline{AC} , \overline{AD} , где $A(4; 0; 5)$, $B(5; 2; 8)$, $C(4; -1; 3)$, $D(2; -3; 1)$?
8. Вычислить объем тетраэдра с вершинами в точках P, Q, R, S , площадь грани QRS и высоту, опущенную на эту грань из вершины P . $P(6; -3; 2)$, $Q(8; -1; -1)$, $R(13; -8; -9)$, $S(11; 2; -5)$.
9. Найти косинус острого угла между плоскостями $\alpha : -x + 4y + 4 = 0$ и $\beta : -x - 2y - z = 15$.
10. Составить уравнение плоскости, проходящей через точки $A(-4; -8; -5)$, $B(-7; -7; -5)$, $C(1; -10; -4)$, и найти расстояние от точки $S(-1; -5; 5)$ до этой плоскости.
11. Составить уравнение плоскости π , проходящей через точку $M(-4; -2; 6)$ перпендикулярно плоскостям $x + 3y + 1 = 0$ и $x + 8y + z - 7 = 0$.
12. Составить уравнение прямой AB и найти расстояние от точки C до этой прямой, если $A(7; 7; 6)$, $B(6; 5; 3)$, $C(10; 12; 14)$.
13. Привести к каноническому виду общие уравнения прямой

$$\begin{cases} 2x - 7y + z - 30 = 0 \\ x - y + z - 3 = 0 \end{cases}.$$
14. Найти проекцию точки $M(-46; -14; 16)$ на плоскость $10x + 4y - 5z = -32$.
15. Найти угол между прямой $l : \frac{x+4}{1} = \frac{y-6}{1} = \frac{z}{1}$ и плоскостью $\pi : 4x - y - 6z - 5 = 0$.

Вариант 33.

1. В параллелепипеде $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ $\overline{AB} = \mathbf{a}$, $\overline{AD} = \mathbf{b}$, $\overline{AA_1} = \mathbf{c}$. Выразить через \mathbf{a} , \mathbf{b} , \mathbf{c} вектор $\mathbf{q} = \overline{KM}$, где K – середина ребра CC_1 , а M делит ребро AB в отношении 1 : 2.
2. Доказать, что векторы $\mathbf{a}(-1; -1; 2)$, $\mathbf{b}(-2; -1; 2)$, $\mathbf{c}(2; 3; -3)$ образуют базис. Разложить вектор $\mathbf{d}(-5; -6; 9)$ по этим векторам.
3. Найти косинус угла между векторами $\mathbf{a} = \mathbf{m} - 3\mathbf{n}$ и $\mathbf{b} = -\mathbf{m} + 4\mathbf{n}$ при $|\mathbf{m}| = 4\sqrt{3}$, $|\mathbf{n}| = 2$, $(\widehat{\mathbf{m}, \mathbf{n}}) = \frac{\pi}{6}$.
4. Найти $\text{pr}_{\mathbf{y}} \mathbf{x}$, при $\mathbf{x} = \mathbf{b}$ и $\mathbf{y} = \mathbf{a} + \mathbf{c}$, где $\mathbf{a}(2; -4; 1)$, $\mathbf{b}(1; -6; 2)$, $\mathbf{c}(0; -1; 0)$.
5. Найти координаты единичного вектора \mathbf{n}_0 , перпендикулярного плоскости $\triangle ABC$, где $A(3; 6; 4)$, $B(8; 2; 6)$, $C(0; 9; 3)$.
6. Вычислить площадь треугольника, построенного на векторах $\mathbf{a} = -4\mathbf{m} + \mathbf{n}$ и $\mathbf{b} = -4\mathbf{m} - \mathbf{n}$ при $|\mathbf{m}| = 1$, $|\mathbf{n}| = 2$, $(\widehat{\mathbf{m}, \mathbf{n}}) = \frac{\pi}{6}$.
7. Лежат ли точки $A(2; 6; 7)$, $B(7; 8; 2)$, $C(3; 4; 8)$, $D(3; 1; 10)$ в одной плоскости?
8. Вычислить объем параллелепипеда $ABCDEFGH$, площадь грани $ABCD$ и высоту, опущенную на эту грань из вершины E . $A(-3; 0; 8)$, $B(0; 1; 13)$, $D(1; -3; 12)$, $E(-9; 1; 0)$.
9. Найти косинус острого угла между плоскостями $\alpha : 2y + z - 15 = 0$ и $\beta : 2x - y - 4z = 15$.
10. Составить уравнение плоскости, проходящей через точки $A(10; -6; 5)$, $B(11; -5; 2)$, $C(9; -5; 3)$, и найти расстояние от точки $S(3; 2; 0)$ до этой плоскости.
11. Составить уравнение плоскости π , проходящей через точку $M(-2; -6; 7)$ перпендикулярно плоскостям $-10x + 3y - 2z - 6 = 0$ и $-9x + 2y - z = 0$.
12. Составить уравнение прямой AB и найти расстояние от точки C до этой прямой, если $A(7; 2; 3)$, $B(6; 3; 1)$, $C(8; 0; 6)$.
13. Привести к каноническому виду общие уравнения прямой

$$\begin{cases} 3x - 8y + z + 8 = 0 \\ -x + 5y + 5 = 0 \end{cases}.$$
14. Найти координаты точки M_1 , симметричной точке $M(-4; 1; -7)$ относительно плоскости $3y + 7z + 17 = 0$.
15. Найти угол между прямой $l : \frac{x}{-3} = \frac{y+2}{4} = \frac{z-5}{1}$ и плоскостью $\pi : x + y - 2z = -1$.

Вариант 34.

1. В параллелепипеде $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ $\overline{AB} = \mathbf{a}$, $\overline{AD} = \mathbf{b}$, $\overline{AA_1} = \mathbf{c}$. Выразить через \mathbf{a} , \mathbf{b} , \mathbf{c} вектор $\mathbf{q} = \overline{KM}$, где K – середина ребра AD , а M делит ребро $D_1 C_1$ в отношении 3 : 2.
2. Доказать, что векторы $\mathbf{a}(3; -2; 4)$, $\mathbf{b}(0; 1; -2)$, $\mathbf{c}(1; -1; 3)$ образуют базис. Разложить вектор $\mathbf{d}(-9; 3; -3)$ по этим векторам.
3. Найти косинус угла между векторами $\mathbf{a} = 2\mathbf{m} + \mathbf{n}$ и $\mathbf{b} = 5\mathbf{m} + \mathbf{n}$ при $|\mathbf{m}| = 1$, $|\mathbf{n}| = 2$, $(\widehat{\mathbf{m}, \mathbf{n}}) = \frac{2\pi}{3}$.
4. Найти $\text{pr}_{\mathbf{y}} \mathbf{x}$, при $\mathbf{x} = \mathbf{a}$ и $\mathbf{y} = \mathbf{b} + \mathbf{c}$, где $\mathbf{a}(-6; -3; -5)$, $\mathbf{b}(-5; 4; -3)$, $\mathbf{c}(1; 1; 1)$.
5. Найти координаты единичного вектора \mathbf{n}_0 , перпендикулярного плоскости $\triangle ABC$, где $A(3; 8; 5)$, $B(2; 13; 6)$, $C(2; 12; 5)$.
6. Вычислить площадь треугольника, построенного на векторах $\mathbf{a} = -\mathbf{m} + \mathbf{n}$ и $\mathbf{b} = -\mathbf{m} - 2\mathbf{n}$ при $|\mathbf{m}| = 5$, $|\mathbf{n}| = 2$, $(\widehat{\mathbf{m}, \mathbf{n}}) = \frac{2\pi}{3}$.
7. Лежат ли точки $A(1; 7; 1)$, $B(8; 10; 6)$, $C(6; 9; 8)$, $D(3; 8; 1)$ в одной плоскости?
8. Вычислить объем параллелепипеда $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$, площадь грани $ABCD$ и высоту, опущенную на эту грань из вершины A_1 . $A(0; 8; 1)$, $B(-3; 5; -7)$, $D(3; 5; 2)$, $A_1(-2; 10; 0)$.
9. Найти косинус острого угла между плоскостями $\alpha : -3x - y - 6z = -5$ и $\beta : -x + y - 14 = 0$.
10. Составить уравнение плоскости, проходящей через точки $A(-10; -1; -6)$, $B(-12; -5; -7)$, $C(-9; 0; -6)$, и найти расстояние от точки $S(-6; -6; 0)$ до этой плоскости.
11. Составить уравнение плоскости π , проходящей через точку $M(-7; 0; 6)$ параллельно прямой $\frac{x+8}{3} = \frac{y-1}{3} = \frac{z-3}{2}$ и перпендикулярно плоскости $4x + y + z - 8 = 0$.
12. Составить уравнение прямой AB и найти расстояние от точки C до этой прямой, если $A(2; 4; 2)$, $B(1; 6; 5)$, $C(0; 7; 7)$.
13. Привести к каноническому виду общие уравнения прямой
$$\begin{cases} 2x - 3y + 4z - 9 = 0 \\ -x + 2y - 3z + 7 = 0 \end{cases}.$$
14. Найти координаты точки M_1 , симметричной точке $M(9; -16; 4)$ относительно плоскости $-5x + 8y - 5z = -22$.
15. Найти угол между прямой $l : \frac{x+6}{2} = \frac{y-3}{1} = \frac{z+6}{3}$ и плоскостью $\pi : 2x + y + 3z + 8 = 0$.

Вариант 35.

1. В параллелепипеде $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ $\overline{AB} = \mathbf{a}$, $\overline{AD} = \mathbf{b}$, $\overline{AA_1} = \mathbf{c}$. Выразить через \mathbf{a} , \mathbf{b} , \mathbf{c} вектор $\mathbf{q} = \overline{KM}$, где K – середина ребра BC , а M делит ребро $D_1 C_1$ в отношении 3 : 1.
2. Доказать, что векторы $\mathbf{a}(3; 1; -1)$, $\mathbf{b}(6; 2; -1)$, $\mathbf{c}(2; 2; 3)$ образуют базис. Разложить вектор $\mathbf{d}(-6; -6; -8)$ по этим векторам.
3. Найти косинус угла между векторами $\mathbf{a} = -5\mathbf{m} + \mathbf{n}$ и $\mathbf{b} = -\mathbf{m} - \mathbf{n}$ при $|\mathbf{m}| = 1$, $|\mathbf{n}| = 2$, $(\widehat{\mathbf{m}, \mathbf{n}}) = \frac{2\pi}{3}$.
4. Найти $\text{pr}_{\mathbf{y}} \mathbf{x}$, при $\mathbf{x} = \mathbf{a} + \mathbf{c}$ и $\mathbf{y} = \mathbf{b}$, где $\mathbf{a}(1; 2; -1)$, $\mathbf{b}(-4; -5; -7)$, $\mathbf{c}(1; -7; 7)$.
5. Найти координаты единичного вектора \mathbf{n}_0 , перпендикулярного плоскости $\triangle ABC$, где $A(9; 2; 7)$, $B(4; 3; 7)$, $C(11; 0; 8)$.
6. Вычислить площадь треугольника, построенного на векторах $\mathbf{a} = -\mathbf{m} - 2\mathbf{n}$ и $\mathbf{b} = -2\mathbf{m} - \mathbf{n}$ при $|\mathbf{m}| = 5$, $|\mathbf{n}| = 1$, $(\widehat{\mathbf{m}, \mathbf{n}}) = \frac{\pi}{3}$.
7. Лежат ли точки $A(0; 5; 2)$, $B(1; 6; 1)$, $C(2; 6; 2)$, $D(4; 6; 4)$ в одной плоскости?
8. Вычислить объем параллелепипеда $ABCDEFGH$, площадь грани $ABCD$ и высоту, опущенную на эту грань из вершины E . $A(7; -4; -1)$, $B(5; -1; 7)$, $D(8; -5; -4)$, $E(6; -3; 1)$.
9. Найти косинус острого угла между плоскостями $\alpha : -x + 2z - 7 = 0$ и $\beta : -2x - 3y - 4z = -14$.
10. Составить уравнение плоскости, проходящей через точки $A(0; -1; -3)$, $B(-3; 4; -1)$, $C(-2; 5; -2)$, и найти расстояние от точки $S(0; 2; -7)$ до этой плоскости.
11. Составить уравнение плоскости π , проходящей через точку $M(-8; 1; 3)$ перпендикулярно плоскостям $2x + y + 4z = -5$ и $-3x - y - 7z + 5 = 0$.
12. Составить уравнение прямой AB и найти расстояние от точки C до этой прямой, если $A(8; 2; 8)$, $B(7; 0; 8)$, $C(11; 7; 9)$.
13. Привести к каноническому виду общие уравнения прямой
$$\begin{cases} 2x + y + 3z - 18 = 0 \\ x + y + z - 2 = 0 \end{cases}.$$
14. Найти координаты точки M_1 , симметричной точке $M(-2; 0; 0)$ относительно плоскости $x - y = -5$.
15. Найти угол между прямой $l : \frac{x+3}{3} = \frac{y-1}{5} = \frac{z-6}{-2}$ и плоскостью $\pi : -x - y - z = 13$.

Вариант 36.

1. В параллелепипеде $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ $\overline{AB} = \mathbf{a}$, $\overline{AD} = \mathbf{b}$, $\overline{AA_1} = \mathbf{c}$. Выразить через \mathbf{a} , \mathbf{b} , \mathbf{c} вектор $\mathbf{q} = \overline{KM}$, где K – середина ребра BB_1 , а M делит ребро DC в отношении 3 : 1.
2. Доказать, что векторы $\mathbf{a}(2; 2; 1)$, $\mathbf{b}(0; -1; 2)$, $\mathbf{c}(3; 4; -2)$ образуют базис. Разложить вектор $\mathbf{d}(1; -3; 10)$ по этим векторам.
3. Найти косинус угла между векторами $\mathbf{a} = 4\mathbf{m} + 3\mathbf{n}$ и $\mathbf{b} = 2\mathbf{m} + \mathbf{n}$ при $|\mathbf{m}| = 1$, $|\mathbf{n}| = 2\sqrt{2}$, $(\widehat{\mathbf{m}, \mathbf{n}}) = \frac{3\pi}{4}$.
4. Найти $\text{pr}_{\mathbf{y}} \mathbf{x}$, при $\mathbf{x} = \mathbf{b} + 3\mathbf{c}$ и $\mathbf{y} = \mathbf{a}$, где $\mathbf{a}(-1; 2; 2)$, $\mathbf{b}(-10; 11; 19)$, $\mathbf{c}(5; -2; -5)$.
5. Найти координаты единичного вектора \mathbf{n}_0 , перпендикулярного плоскости $\triangle ABC$, где $A(9; 9; 4)$, $B(6; 12; 2)$, $C(5; 11; 3)$.
6. Вычислить площадь параллелограмма, построенного на векторах $\mathbf{a} = -3\mathbf{m} + 2\mathbf{n}$ и $\mathbf{b} = -4\mathbf{m} - 4\mathbf{n}$ при $|\mathbf{m}| = 4$, $|\mathbf{n}| = 4$, $(\widehat{\mathbf{m}, \mathbf{n}}) = \frac{3\pi}{4}$.
7. Компланарны ли векторы $\mathbf{a}(-1; 0; -1)$, $\mathbf{b}(-3; -1; -4)$, $\mathbf{c}(1; -2; -1)$?
8. Вычислить объем параллелепипеда $A_1 A_2 A_3 A_4 B_1 B_2 B_3 B_4$, площадь грани $A_1 A_2 A_3 A_4$ и высоту, опущенную на эту грань из вершины B_1 . $A_1(0; 0; 9)$, $A_2(1; 3; 6)$, $A_4(-3; 5; 8)$, $B_1(0; 3; 7)$.
9. Найти косинус острого угла между плоскостями $\alpha : -y + z - 4 = 0$ и $\beta : -2x - 2y - z = 14$.
10. Задана пирамида $SABC$ координатами вершин $A(-7; 10; 0)$, $B(-2; 12; -1)$, $C(-5; 9; 1)$, $S(5; 3; 3)$:
 а) составить уравнение плоскости ABC ,
 б) найти расстояние от вершины S до плоскости ABC .
11. Составить канонические уравнения прямой, проходящей через точку $M(-8; 6; 3)$ параллельно плоскости $x + 2y - z = 9$ и перпендикулярно прямой $\frac{x+5}{-2} = \frac{y-2}{-3} = \frac{z+6}{3}$.
12. Составить уравнение прямой AB и найти расстояние от точки C до этой прямой, если $A(7; 7; 5)$, $B(10; 9; 6)$, $C(8; 8; 6)$.
13. Привести к каноническому виду общие уравнения прямой

$$\begin{cases} x - y + 5 = 0 \\ x - 6y + z + 19 = 0 \end{cases}.$$
14. Найти координаты точки M_1 , симметричной точке $M(-12; 15; -8)$ относительно плоскости $-8x + 7y - 7z = 14$.
15. Найти угол между прямой $l : \frac{x-5}{-1} = \frac{y+3}{2} = \frac{z-7}{-1}$ и плоскостью $\pi : 4x + y + 3z = -1$.

Вариант 37.

1. В параллелепипеде $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ $\overline{AB} = \mathbf{a}$, $\overline{AD} = \mathbf{b}$, $\overline{AA_1} = \mathbf{c}$. Выразить через \mathbf{a} , \mathbf{b} , \mathbf{c} вектор $\mathbf{q} = \overline{KM}$, где K – середина ребра $B_1 C_1$, а M делит ребро AA_1 в отношении $2 : 3$.
2. Доказать, что векторы $\mathbf{a}(2; 3; 1)$, $\mathbf{b}(-3; -2; -2)$, $\mathbf{c}(3; -4; 2)$ образуют базис. Разложить вектор $\mathbf{d}(1; 10; 0)$ по этим векторам.
3. Найти косинус угла между векторами $\mathbf{a} = \mathbf{m} + \mathbf{n}$ и $\mathbf{b} = 4\mathbf{m} + 2\mathbf{n}$ при $|\mathbf{m}| = 1$, $|\mathbf{n}| = 2\sqrt{3}$, $(\widehat{\mathbf{m}, \mathbf{n}}) = \frac{5\pi}{6}$.
4. Найти $\text{pr}_{\mathbf{y}} \mathbf{x}$, при $\mathbf{x} = \mathbf{b} + \mathbf{c}$ и $\mathbf{y} = \mathbf{a}$, где $\mathbf{a}(-3; 1; -5)$, $\mathbf{b}(-2; 1; -3)$, $\mathbf{c}(7; 3; 5)$.
5. Найти координаты единичного вектора \mathbf{n}_0 , перпендикулярного плоскости $\triangle ABC$, где $A(1; 8; 5)$, $B(3; 11; 1)$, $C(2; 10; 4)$.
6. Вычислить площадь параллелограмма, построенного на векторах $\mathbf{a} = 2\mathbf{m} - 4\mathbf{n}$ и $\mathbf{b} = 4\mathbf{m} - 3\mathbf{n}$ при $|\mathbf{m}| = 5$, $|\mathbf{n}| = 2$, $(\widehat{\mathbf{m}, \mathbf{n}}) = \frac{\pi}{4}$.
7. Компланарны ли векторы $\mathbf{a}(3; 1; 2)$, $\mathbf{b}(4; 0; 1)$, $\mathbf{c}(-5; 2; 1)$?
8. Вычислить объем тетраэдра с вершинами в точках A_1, A_2, A_3, A_4 , площадь грани $A_1 A_2 A_4$ и высоту, опущенную на эту грань из вершины A_3 . $A_1(6; 0; -3)$, $A_2(7; 4; -1)$, $A_3(8; -8; 0)$, $A_4(7; 1; -1)$.
9. Найти косинус острого угла между плоскостями $\alpha : 6x - 4y + z = 2$ и $\beta : x + y - 4 = 0$.
10. Задана пирамида $SABC$ координатами вершин $A(4; -4; -1)$, $B(6; -2; 0)$, $C(3; -7; -1)$, $S(4; 7; -5)$:
 а) составить уравнение плоскости ABC ,
 б) найти расстояние от вершины S до плоскости ABC .
11. Составить уравнение плоскости π , проходящей через точку $M(-5; 6; -1)$ параллельно прямым $\frac{x-6}{2} = \frac{y-6}{1} = \frac{z}{2}$ и $\frac{x-6}{1} = \frac{y+4}{1} = \frac{z}{-3}$.
12. Составить уравнение прямой AB и найти расстояние от точки C до этой прямой, если $A(1; 6; 2)$, $B(0; 8; 2)$, $C(0; 7; 3)$.
13. Привести к каноническому виду общие уравнения прямой
$$\begin{cases} 2x - y + 4z - 12 = 0 \\ -x + y + z - 2 = 0 \end{cases}.$$
14. Найти координаты точки M_1 , симметричной точке $M(5; -1; -2)$ относительно плоскости $3x - 2y + z = -6$.
15. Найти угол между прямой $l : \frac{x-5}{-2} = \frac{y}{-1} = \frac{z-5}{1}$ и плоскостью $\pi : 4x + 2y + z = 8$.

Вариант 38.

1. В параллелепипеде $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ $\overline{AB} = \mathbf{a}$, $\overline{AD} = \mathbf{b}$, $\overline{AA_1} = \mathbf{c}$. Выразить через \mathbf{a} , \mathbf{b} , \mathbf{c} вектор $\mathbf{q} = \overline{KM}$, где K – середина ребра AD , а M делит ребро $A_1 B_1$ в отношении 1 : 2.
2. Доказать, что векторы $\mathbf{a}(5; 6; 1)$, $\mathbf{b}(-4; 1; 2)$, $\mathbf{c}(-2; -4; -1)$ образуют базис. Разложить вектор $\mathbf{d}(-9; 4; 5)$ по этим векторам.
3. Найти косинус угла между векторами $\mathbf{a} = 4\mathbf{m} + \mathbf{n}$ и $\mathbf{b} = \mathbf{m} + \mathbf{n}$ при $|\mathbf{m}| = 2$, $|\mathbf{n}| = \sqrt{2}$, $(\widehat{\mathbf{m}, \mathbf{n}}) = \frac{3\pi}{4}$.
4. Найти $\text{pr}_{\mathbf{y}} \mathbf{x}$, при $\mathbf{x} = \mathbf{a}$ и $\mathbf{y} = \mathbf{b} + \mathbf{c}$, где $\mathbf{a}(4; 1; 2)$, $\mathbf{b}(-2; -1; -2)$, $\mathbf{c}(2; 1; 1)$.
5. Найти координаты единичного вектора \mathbf{n}_0 , перпендикулярного плоскости $\triangle ABC$, где $A(5; 2; 7)$, $B(9; 3; 9)$, $C(-4; 0; 4)$.
6. Вычислить площадь параллелограмма, построенного на векторах $\mathbf{a} = -4\mathbf{m} - 4\mathbf{n}$ и $\mathbf{b} = 2\mathbf{m} + \mathbf{n}$ при $|\mathbf{m}| = 3$, $|\mathbf{n}| = 1$, $(\widehat{\mathbf{m}, \mathbf{n}}) = \frac{5\pi}{6}$.
7. Компланарны ли векторы \overline{AB} , \overline{AC} , \overline{AD} , где $A(4; 2; 1)$, $B(7; 4; 5)$, $C(2; 4; 0)$, $D(2; 9; 3)$?
8. Вычислить объем тетраэдра с вершинами в точках A_1, A_2, A_3, A_4 , площадь грани $A_1 A_3 A_4$ и высоту, опущенную на эту грань из вершины A_2 . $A_1(-2; 1; 1)$, $A_2(-4; -6; 2)$, $A_3(-1; 9; -1)$, $A_4(-2; -4; 3)$.
9. Найти косинус острого угла между плоскостями $\alpha : 3x - 2y + 2z = -7$ и $\beta : -x + 3z + 7 = 0$.
10. Задана пирамида $SABC$ координатами вершин $A(1; -7; -4)$, $B(0; -6; -7)$, $C(0; -4; -12)$, $S(-2; 1; -4)$:
 а) составить уравнение плоскости ABC ,
 б) найти расстояние от вершины S до плоскости ABC .
11. Составить уравнение плоскости π , проходящей через точку $M(4; 3; 4)$ параллельно прямой $\frac{x+1}{-2} = \frac{y-2}{5} = \frac{z-3}{1}$ и перпендикулярно плоскости $x - 3y = 1$.
12. Составить уравнение прямой AB и найти расстояние от точки C до этой прямой, если $A(5; 4; 0)$, $B(6; 1; 4)$, $C(3; 11; -9)$.
13. Привести к каноническому виду общие уравнения прямой
$$\begin{cases} 3x + y - 2z + 18 = 0 \\ 2x + y - 3z + 26 = 0 \end{cases}.$$
14. Найти проекцию точки $M(-20; 7; -29)$ на плоскость $4x - 3y + 10z + 16 = 0$.
15. Найти угол между прямой $l : \frac{x+1}{1} = \frac{y}{-1} = \frac{z-6}{1}$ и плоскостью $\pi : -5x - 5y - z - 2 = 0$.

Вариант 39.

1. В параллелепипеде $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ $\overline{AB} = \mathbf{a}$, $\overline{AD} = \mathbf{b}$, $\overline{AA_1} = \mathbf{c}$. Выразить через \mathbf{a} , \mathbf{b} , \mathbf{c} вектор $\mathbf{q} = \overline{KM}$, где K – середина ребра $B_1 C_1$, а M делит ребро DD_1 в отношении 1 : 2.
2. Доказать, что векторы $\mathbf{a}(-1; -4; 5)$, $\mathbf{b}(0; -1; 2)$, $\mathbf{c}(-2; -1; -1)$ образуют базис. Разложить вектор $\mathbf{d}(1; -3; 6)$ по этим векторам.
3. Найти косинус угла между векторами $\mathbf{a} = -6\mathbf{m} + 2\mathbf{n}$ и $\mathbf{b} = -2\mathbf{m} + \mathbf{n}$ при $|\mathbf{m}| = 1$, $|\mathbf{n}| = 2\sqrt{3}$, $(\widehat{\mathbf{m}, \mathbf{n}}) = \frac{\pi}{6}$.
4. Найти $\text{pr}_{\mathbf{y}} \mathbf{x}$, при $\mathbf{x} = 2\mathbf{a} + \mathbf{c}$ и $\mathbf{y} = \mathbf{b}$, где $\mathbf{a}(-3; -1; 1)$, $\mathbf{b}(-5; -2; 2)$, $\mathbf{c}(3; 5; -6)$.
5. Найти координаты единичного вектора \mathbf{n}_0 , перпендикулярного плоскости $\triangle ABC$, где $A(8; 7; 0)$, $B(9; 14; 0)$, $C(7; -1; 1)$.
6. Вычислить площадь треугольника, построенного на векторах $\mathbf{a} = -4\mathbf{m} + 3\mathbf{n}$ и $\mathbf{b} = 3\mathbf{m} - 3\mathbf{n}$ при $|\mathbf{m}| = 3$, $|\mathbf{n}| = 1$, $(\widehat{\mathbf{m}, \mathbf{n}}) = \frac{\pi}{4}$.
7. Компланарны ли векторы $\mathbf{a}(2; 9; 7)$, $\mathbf{b}(-1; 0; -2)$, $\mathbf{c}(-1; -8; -4)$?
8. Вычислить объем тетраэдра с вершинами в точках P, Q, R, S , площадь грани PQS и высоту, опущенную на эту грань из вершины R . $P(-1; 5; 3)$, $Q(4; 5; -3)$, $R(0; 3; 5)$, $S(-6; 4; 10)$.
9. Найти косинус острого угла между плоскостями $\alpha : x + 2z + 3 = 0$ и $\beta : -4x - 2y + z = -3$.
10. Задана пирамида $SABC$ координатами вершин $A(-9; -3; -2)$, $B(-8; -2; -3)$, $C(-8; -1; 1)$, $S(6; -2; -6)$:
 а) составить уравнение плоскости ABC ,
 б) найти расстояние от вершины S до плоскости ABC .
11. Составить канонические уравнения прямой, проходящей через точку $M(1; 0; -9)$ параллельно плоскости $3x + 9y - z - 3 = 0$ и перпендикулярно прямой $\frac{x}{-2} = \frac{y-6}{-8} = \frac{z+7}{1}$.
12. Составить уравнение прямой AB и найти расстояние от точки C до этой прямой, если $A(0; 1; 1)$, $B(-4; 0; 4)$, $C(-7; -1; 6)$.
13. Привести к каноническому виду общие уравнения прямой

$$\begin{cases} x - 8y - 6 = 0 \\ -2x + 7y + z - 14 = 0 \end{cases}.$$
14. Найти проекцию точки $M(1; -20; -5)$ на плоскость $2x + 3y + 2z = 0$.
15. Найти угол между прямой $l : \frac{x+1}{-1} = \frac{y+8}{-4} = \frac{z-4}{-1}$ и плоскостью $\pi : 2x - 2y - z = 7$.