

Вариант 0.

1. В параллелепипеде $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ $\overline{AB} = \mathbf{a}$, $\overline{AD} = \mathbf{b}$, $\overline{AA_1} = \mathbf{c}$. Выразить через \mathbf{a} , \mathbf{b} , \mathbf{c} вектор $\mathbf{q} = \overline{KM}$, где K – середина ребра AB , а M делит ребро CC_1 в отношении 1 : 2.
2. Доказать, что векторы $\mathbf{a}(-5; 6; -5)$, $\mathbf{b}(-1; 1; -2)$, $\mathbf{c}(2; -2; 1)$ образуют базис. Разложить вектор $\mathbf{d}(6; -9; 9)$ по этим векторам.
3. Найти косинус угла между векторами $\mathbf{a} = -2\mathbf{m} + 2\mathbf{n}$ и $\mathbf{b} = 3\mathbf{m} - 2\mathbf{n}$ при $|\mathbf{m}| = 1$, $|\mathbf{n}| = 2$, $(\widehat{\mathbf{m}, \mathbf{n}}) = \frac{\pi}{3}$.
4. Найти $\text{pr}_{\mathbf{y}} \mathbf{x}$, при $\mathbf{x} = \mathbf{b} + \mathbf{c}$ и $\mathbf{y} = \mathbf{a}$, где $\mathbf{a}(2; -5; 6)$, $\mathbf{b}(1; -3; 4)$, $\mathbf{c}(2; 5; -8)$.
5. Найти координаты единичного вектора \mathbf{n}_0 , перпендикулярного плоскости $\triangle ABC$, где $A(9; 1; 9)$, $B(11; -2; 11)$, $C(8; -1; 10)$.
6. Вычислить площадь треугольника, построенного на векторах $\mathbf{a} = 3\mathbf{m} + 2\mathbf{n}$ и $\mathbf{b} = -4\mathbf{m} + \mathbf{n}$ при $|\mathbf{m}| = 1$, $|\mathbf{n}| = 3$, $(\widehat{\mathbf{m}, \mathbf{n}}) = \frac{2\pi}{3}$.
7. Вычислить объем параллелепипеда $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$, площадь грани $ABCD$ и высоту, опущенную на эту грань из вершины A_1 . $A(6; 7; 6)$, $B(7; 3; 4)$, $D(8; 8; 6)$, $A_1(3; 3; 5)$.
8. Задана пирамида $SABC$ координатами вершин $A(10; -2; -6)$, $B(11; -7; -6)$, $C(9; -3; -5)$, $S(0; 3; -5)$:
а) составить уравнение плоскости ABC ,
б) найти расстояние от вершины S до плоскости ABC .
9. Составить уравнение плоскости π , проходящей через точку $M(-5; -4; -7)$ параллельно прямой $\frac{x}{2} = \frac{y-2}{1} = \frac{z+8}{-1}$ и $\frac{x+8}{-1} = \frac{y-2}{1} = \frac{z+5}{1}$.
10. Составить уравнение прямой AB и найти расстояние от точки C до этой прямой, если $A(1; 3; 5)$, $B(4; 5; 10)$, $C(5; 6; 12)$.
11. Привести к каноническому виду общие уравнения прямой
$$\begin{cases} x - y + 2z - 16 = 0 \\ 2x - y + z - 13 = 0 \end{cases}$$
.
12. Найти координаты точки M_1 , симметричной точке $M(1; 4; 0)$ относительно плоскости $-9x + y - 36 = 0$.
13. Найти угол между прямой $l : \frac{x+8}{-1} = \frac{y+7}{-2} = \frac{z+5}{2}$ и плоскостью $\pi : -x - 3y + 2z - 11 = 0$.

Вариант 1.

1. В параллелепипеде $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ $\overline{AB} = \mathbf{a}$, $\overline{AD} = \mathbf{b}$, $\overline{AA_1} = \mathbf{c}$. Выразить через \mathbf{a} , \mathbf{b} , \mathbf{c} вектор $\mathbf{q} = \overline{KM}$, где K – середина ребра CC_1 , а M делит ребро AB в отношении $2 : 3$.
2. Доказать, что векторы $\mathbf{a}(0; 2; -1)$, $\mathbf{b}(-2; 1; -2)$, $\mathbf{c}(3; -2; 2)$ образуют базис. Разложить вектор $\mathbf{d}(-10; 5; -5)$ по этим векторам.
3. Найти косинус угла между векторами $\mathbf{a} = -4\mathbf{m} + 2\mathbf{n}$ и $\mathbf{b} = \mathbf{m} - \mathbf{n}$ при $|\mathbf{m}| = 1$, $|\mathbf{n}| = 2$, $(\widehat{\mathbf{m}, \mathbf{n}}) = \frac{\pi}{3}$.
4. Найти $\text{pr}_{\mathbf{y}} \mathbf{x}$, при $\mathbf{x} = \mathbf{b}$ и $\mathbf{y} = 2\mathbf{a} + 4\mathbf{c}$, где $\mathbf{a}(-1; -1; 1)$, $\mathbf{b}(-7; -7; 6)$, $\mathbf{c}(2; 1; 0)$.
5. Найти координаты единичного вектора \mathbf{n}_0 , перпендикулярного плоскости $\triangle ABC$, где $A(6; 0; 6)$, $B(8; -5; 5)$, $C(7; -7; 6)$.
6. Вычислить площадь параллелограмма, построенного на векторах $\mathbf{a} = 2\mathbf{m} - 2\mathbf{n}$ и $\mathbf{b} = -3\mathbf{m} - 4\mathbf{n}$ при $|\mathbf{m}| = 1$, $|\mathbf{n}| = 4$, $(\widehat{\mathbf{m}, \mathbf{n}}) = \frac{5\pi}{6}$.
7. Вычислить объем параллелепипеда $ABCDEFGH$, площадь грани $ABCD$ и высоту, опущенную на эту грань из вершины E . $A(-8; -9; -6)$, $B(-5; -12; -11)$, $D(-3; -7; -13)$, $E(-4; -10; -12)$.
8. Задана пирамида $SABC$ координатами вершин $A(4; -5; 3)$, $B(5; -4; -4)$, $C(5; -3; -5)$, $S(-4; -2; -8)$:
а) составить уравнение плоскости ABC ,
б) найти расстояние от вершины S до плоскости ABC .
9. Составить уравнение плоскости π , проходящей через точку $M(2; 7; -3)$ перпендикулярно плоскостям $-4x + y + z - 3 = 0$ и $-3x - y - 6 = 0$.
10. Составить уравнение прямой AB и найти расстояние от точки C до этой прямой, если $A(1; 3; 7)$, $B(0; -1; -2)$, $C(2; 6; 14)$.
11. Привести к каноническому виду общие уравнения прямой
$$\begin{cases} -2x + 9y + z + 27 = 0 \\ -x + y + 3 = 0 \end{cases}.$$
12. Найти координаты точки M_1 , симметричной точке $M(3; 0; -2)$ относительно плоскости $5x - 7z + 8 = 0$.
13. Найти угол между прямой $l : \frac{x+5}{-1} = \frac{y-3}{-2} = \frac{z+8}{-1}$ и плоскостью $\pi : x - y - 5z + 12 = 0$.

Вариант 2.

1. В параллелепипеде $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ $\overline{AB} = \mathbf{a}$, $\overline{AD} = \mathbf{b}$, $\overline{AA_1} = \mathbf{c}$. Выразить через \mathbf{a} , \mathbf{b} , \mathbf{c} вектор $\mathbf{q} = \overline{KM}$, где K – середина ребра $A_1 B_1$, а M делит ребро AD в отношении $2 : 3$.
2. Доказать, что векторы $\mathbf{a}(-2; -6; -1)$, $\mathbf{b}(-3; 1; -1)$, $\mathbf{c}(5; 0; 2)$ образуют базис. Разложить вектор $\mathbf{d}(-5; -10; -2)$ по этим векторам.
3. Найти косинус угла между векторами $\mathbf{a} = 2\mathbf{m} + 3\mathbf{n}$ и $\mathbf{b} = 2\mathbf{m} + \mathbf{n}$ при $|\mathbf{m}| = 2$, $|\mathbf{n}| = 1$, $(\widehat{\mathbf{m}, \mathbf{n}}) = \frac{2\pi}{3}$.
4. Найти $\text{pr}_{\mathbf{y}} \mathbf{x}$, при $\mathbf{x} = \mathbf{a}$ и $\mathbf{y} = \mathbf{b} + \mathbf{c}$, где $\mathbf{a}(-2; 6; 1)$, $\mathbf{b}(1; 2; 1)$, $\mathbf{c}(1; 4; -1)$.
5. Найти координаты единичного вектора \mathbf{n}_0 , перпендикулярного плоскости $\triangle ABC$, где $A(7; 1; 1)$, $B(-1; 6; 3)$, $C(4; 3; 2)$.
6. Вычислить площадь параллелограмма, построенного на векторах $\mathbf{a} = -4\mathbf{m} + 3\mathbf{n}$ и $\mathbf{b} = -3\mathbf{m} + 4\mathbf{n}$ при $|\mathbf{m}| = 4$, $|\mathbf{n}| = 1$, $(\widehat{\mathbf{m}, \mathbf{n}}) = \frac{5\pi}{6}$.
7. Вычислить объем тетраэдра с вершинами в точках A_1, A_2, A_3, A_4 , площадь грани $A_1 A_2 A_4$ и высоту, опущенную на эту грань из вершины A_3 . $A_1(-8; -3; 1)$, $A_2(-7; 2; -5)$, $A_3(-6; -2; 3)$, $A_4(-4; -1; 4)$.
8. Составить уравнение плоскости, проходящей через точки $A(5; 1; -2)$, $B(6; -4; -3)$, $C(3; 9; 1)$, и найти расстояние от точки $S(4; 4; 6)$ до этой плоскости.
9. Составить канонические уравнения прямой, проходящей через точку $M(-6; -1; -10)$ параллельно плоскости $2x + 6y - z = 9$ и перпендикулярно прямой $\frac{x+8}{3} = \frac{y-2}{7} = \frac{z-1}{-1}$.
10. Составить уравнение прямой AB и найти расстояние от точки C до этой прямой, если $A(5; 7; 7)$, $B(13; 6; -2)$, $C(14; 6; -3)$.
11. Привести к каноническому виду общие уравнения прямой
$$\begin{cases} 9x + y + 6 = 0 \\ 10x + 2y + z + 7 = 0 \end{cases}.$$
12. Найти проекцию точки $M(24; -6; -12)$ на плоскость $10x + y - 3z = -60$.
13. Найти угол между прямой $l : \frac{x-8}{-1} = \frac{y-2}{-3} = \frac{z+4}{1}$ и плоскостью $\pi : -2x - 2y + 2z - 9 = 0$.

Вариант 3.

1. В параллелепипеде $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ $\overline{AB} = \mathbf{a}$, $\overline{AD} = \mathbf{b}$, $\overline{AA_1} = \mathbf{c}$. Выразить через \mathbf{a} , \mathbf{b} , \mathbf{c} вектор $\mathbf{q} = \overline{KM}$, где K – середина ребра AB , а M делит ребро DD_1 в отношении $1 : 2$.
2. Доказать, что векторы $\mathbf{a}(-2; 1; -1)$, $\mathbf{b}(-5; -1; -1)$, $\mathbf{c}(-3; 4; -2)$ образуют базис. Разложить вектор $\mathbf{d}(0; 5; -1)$ по этим векторам.
3. Найти косинус угла между векторами $\mathbf{a} = -3\mathbf{m} + 2\mathbf{n}$ и $\mathbf{b} = -2\mathbf{m} + \mathbf{n}$ при $|\mathbf{m}| = 1$, $|\mathbf{n}| = 2$, $(\widehat{\mathbf{m}, \mathbf{n}}) = \frac{\pi}{3}$.
4. Найти $\text{pr}_{\mathbf{y}} \mathbf{x}$, при $\mathbf{x} = \mathbf{b}$ и $\mathbf{y} = 2\mathbf{a} + 3\mathbf{c}$, где $\mathbf{a}(-13; 3; 6)$, $\mathbf{b}(-3; 2; 1)$, $\mathbf{c}(7; -3; -2)$.
5. Найти координаты единичного вектора \mathbf{n}_0 , перпендикулярного плоскости $\triangle ABC$, где $A(1; 1; 4)$, $B(5; 2; 2)$, $C(2; 3; 1)$.
6. Вычислить площадь треугольника, построенного на векторах $\mathbf{a} = -2\mathbf{m} + 3\mathbf{n}$ и $\mathbf{b} = -4\mathbf{m} + 4\mathbf{n}$ при $|\mathbf{m}| = 1$, $|\mathbf{n}| = 5$, $(\widehat{\mathbf{m}, \mathbf{n}}) = \frac{3\pi}{4}$.
7. Вычислить объем параллелепипеда $A_1 A_2 A_3 A_4 B_1 B_2 B_3 B_4$, площадь грани $A_1 A_2 A_3 A_4$ и высоту, опущенную на эту грань из вершины B_1 . $A_1(-7; 0; 3)$, $A_2(-14; 2; -1)$, $A_4(-12; 1; 0)$, $B_1(2; -4; 9)$.
8. Составить уравнение плоскости, проходящей через точки $A(-9; -5; 3)$, $B(-7; -10; 4)$, $C(-6; -9; 5)$, и найти расстояние от точки $S(5; 0; 0)$ до этой плоскости.
9. Составить уравнение плоскости π , проходящей через точку $M(-3; 5; -8)$ параллельно прямой $\frac{x-5}{-1} = \frac{y-1}{6} = \frac{z-3}{1}$ и перпендикулярно плоскости $-x + 5y + 5 = 0$.
10. Составить уравнение прямой AB и найти расстояние от точки C до этой прямой, если $A(3; 5; 6)$, $B(4; 4; 4)$, $C(7; 2; -1)$.
11. Привести к каноническому виду общие уравнения прямой
$$\begin{cases} 3x - 2y + 7z - 12 = 0 \\ 2x - y + 2z - 1 = 0 \end{cases}.$$
12. Найти проекцию точки $M(5; 22; -14)$ на плоскость $-5x - 10y + 4z = -19$.
13. Найти угол между прямой $l : \frac{x}{1} = \frac{y+4}{-2} = \frac{z-6}{2}$ и плоскостью $\pi : -2x - y - 3z - 9 = 0$.

Вариант 4.

1. В параллелепипеде $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ $\overline{AB} = \mathbf{a}$, $\overline{AD} = \mathbf{b}$, $\overline{AA_1} = \mathbf{c}$. Выразить через \mathbf{a} , \mathbf{b} , \mathbf{c} вектор $\mathbf{q} = \overline{KM}$, где K – середина ребра CC_1 , а M делит ребро AD в отношении $2 : 1$.
2. Доказать, что векторы $\mathbf{a}(-1; -1; 2)$, $\mathbf{b}(-1; 3; 0)$, $\mathbf{c}(-2; -2; 3)$ образуют базис. Разложить вектор $\mathbf{d}(1; 1; -1)$ по этим векторам.
3. Найти косинус угла между векторами $\mathbf{a} = 2\mathbf{m} + \mathbf{n}$ и $\mathbf{b} = \mathbf{m} + \mathbf{n}$ при $|\mathbf{m}| = 2\sqrt{3}$, $|\mathbf{n}| = 3$, $(\widehat{\mathbf{m}, \mathbf{n}}) = \frac{5\pi}{6}$.
4. Найти $\text{pr}_{\mathbf{y}} \mathbf{x}$, при $\mathbf{x} = 2\mathbf{a} + 2\mathbf{c}$ и $\mathbf{y} = \mathbf{b}$, где $\mathbf{a}(-1; 1; 1)$, $\mathbf{b}(2; -1; -2)$, $\mathbf{c}(1; -1; -4)$.
5. Найти координаты единичного вектора \mathbf{n}_0 , перпендикулярного плоскости $\triangle ABC$, где $A(5; 1; 8)$, $B(8; 0; 1)$, $C(3; 2; 12)$.
6. Вычислить площадь параллелограмма, построенного на векторах $\mathbf{a} = -2\mathbf{m} - 2\mathbf{n}$ и $\mathbf{b} = -2\mathbf{m} + 3\mathbf{n}$ при $|\mathbf{m}| = 3$, $|\mathbf{n}| = 4$, $(\widehat{\mathbf{m}, \mathbf{n}}) = \frac{\pi}{3}$.
7. Вычислить объем параллелепипеда $ABCDEFGH$, площадь грани $ABCD$ и высоту, опущенную на эту грань из вершины E . $A(-8; 6; 5)$, $B(-2; 10; 10)$, $D(-5; 8; 10)$, $E(-7; 7; 7)$.
8. Составить уравнение плоскости, проходящей через точки $A(5; 3; -3)$, $B(3; 2; -4)$, $C(8; 4; -3)$, и найти расстояние от точки $S(-2; 4; 4)$ до этой плоскости.
9. Составить уравнение плоскости π , проходящей через точку $M(6; -1; 3)$ перпендикулярно плоскостям $x - y - 2 = 0$ и $-4x + 2y - z + 4 = 0$.
10. Составить уравнение прямой AB и найти расстояние от точки C до этой прямой, если $A(6; 6; 6)$, $B(4; 9; 7)$, $C(5; 7; 7)$.
11. Привести к каноническому виду общие уравнения прямой
$$\begin{cases} 7x + 2y - z - 15 = 0 \\ x - y + z + 16 = 0 \end{cases}.$$
12. Найти проекцию точки $M(-27; 5; 24)$ на плоскость $6x + y - 10z - 14 = 0$.
13. Найти угол между прямой $l : \frac{x-6}{2} = \frac{y}{-3} = \frac{z-2}{-1}$ и плоскостью $\pi : x - 2y - 3z + 14 = 0$.

Вариант 5.

1. В параллелепипеде $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ $\overline{AB} = \mathbf{a}$, $\overline{AD} = \mathbf{b}$, $\overline{AA_1} = \mathbf{c}$. Выразить через \mathbf{a} , \mathbf{b} , \mathbf{c} вектор $\mathbf{q} = \overline{KM}$, где K – середина ребра AD , а M делит ребро CC_1 в отношении 1 : 2.
2. Доказать, что векторы $\mathbf{a}(-5; 2; 5)$, $\mathbf{b}(-5; 1; 3)$, $\mathbf{c}(-3; 0; 1)$ образуют базис. Разложить вектор $\mathbf{d}(9; -1; -3)$ по этим векторам.
3. Найти косинус угла между векторами $\mathbf{a} = -\mathbf{m} - 5\mathbf{n}$ и $\mathbf{b} = -\mathbf{m} - \mathbf{n}$ при $|\mathbf{m}| = \sqrt{3}$, $|\mathbf{n}| = 2$, $(\widehat{\mathbf{m}, \mathbf{n}}) = \frac{5\pi}{6}$.
4. Найти $\text{pr}_{\mathbf{y}} \mathbf{x}$, при $\mathbf{x} = \mathbf{a}$ и $\mathbf{y} = 2\mathbf{b} + \mathbf{c}$, где $\mathbf{a}(3; 5; 3)$, $\mathbf{b}(4; 7; 6)$, $\mathbf{c}(-5; -11; -18)$.
5. Найти координаты единичного вектора \mathbf{n}_0 , перпендикулярного плоскости $\triangle ABC$, где $A(8; 8; 0)$, $B(1; 9; -2)$, $C(0; 9; -1)$.
6. Вычислить площадь треугольника, построенного на векторах $\mathbf{a} = 2\mathbf{m} + 2\mathbf{n}$ и $\mathbf{b} = -\mathbf{m} - 3\mathbf{n}$ при $|\mathbf{m}| = 1$, $|\mathbf{n}| = 2$, $(\widehat{\mathbf{m}, \mathbf{n}}) = \frac{5\pi}{6}$.
7. Вычислить объем параллелепипеда $ABCDEFGH$, площадь грани $ABCD$ и высоту, опущенную на эту грань из вершины E . $A(1; 0; 6)$, $B(-3; 5; 11)$, $D(-4; 6; 13)$, $E(3; -1; 5)$.
8. Составить уравнение плоскости, проходящей через точки $A(6; 3; 4)$, $B(7; 2; 4)$, $C(10; 2; 5)$, и найти расстояние от точки $S(8; -5; -7)$ до этой плоскости.
9. Составить канонические уравнения прямой, проходящей через точку $M(-6; 6; -9)$ параллельно плоскости $x + 2y - z + 3 = 0$ и перпендикулярно прямой $\frac{x+5}{-1} = \frac{y}{-1} = \frac{z-5}{-3}$.
10. Составить уравнение прямой AB и найти расстояние от точки C до этой прямой, если $A(0; 6; 9)$, $B(-2; 9; 5)$, $C(-3; 10; 4)$.
11. Привести к каноническому виду общие уравнения прямой
$$\begin{cases} -3x + 2y + z - 19 = 0 \\ -x + 3y + 2z - 14 = 0 \end{cases}.$$
12. Найти проекцию точки $M(34; 3; 2)$ на плоскость $9x + 4y + z - 26 = 0$.
13. Найти угол между прямой $l : \frac{x+1}{1} = \frac{y-6}{1} = \frac{z-8}{1}$ и плоскостью $\pi : -2x - 5y - 4z = 6$.

Вариант 6.

1. В параллелепипеде $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ $\overline{AB} = \mathbf{a}$, $\overline{AD} = \mathbf{b}$, $\overline{AA_1} = \mathbf{c}$. Выразить через \mathbf{a} , \mathbf{b} , \mathbf{c} вектор $\mathbf{q} = \overline{KM}$, где K – середина ребра $A_1 B_1$, а M делит ребро AD в отношении $2 : 3$.
2. Доказать, что векторы $\mathbf{a}(2; 6; -5)$, $\mathbf{b}(1; -1; 6)$, $\mathbf{c}(1; 5; -6)$ образуют базис. Разложить вектор $\mathbf{d}(-3; -5; -1)$ по этим векторам.
3. Найти косинус угла между векторами $\mathbf{a} = \mathbf{m} - 5\mathbf{n}$ и $\mathbf{b} = -\mathbf{m} + 6\mathbf{n}$ при $|\mathbf{m}| = 4\sqrt{3}$, $|\mathbf{n}| = 1$, $(\widehat{\mathbf{m}, \mathbf{n}}) = \frac{\pi}{6}$.
4. Найти $\text{pr}_{\mathbf{y}} \mathbf{x}$, при $\mathbf{x} = \mathbf{b}$ и $\mathbf{y} = \mathbf{a} + 2\mathbf{c}$, где $\mathbf{a}(5; -4; -8)$, $\mathbf{b}(1; 2; -1)$, $\mathbf{c}(-2; -1; 1)$.
5. Найти координаты единичного вектора \mathbf{n}_0 , перпендикулярного плоскости $\triangle ABC$, где $A(8; 6; 5)$, $B(6; 7; 5)$, $C(3; 8; 4)$.
6. Вычислить площадь треугольника, построенного на векторах $\mathbf{a} = -2\mathbf{m} - 4\mathbf{n}$ и $\mathbf{b} = -2\mathbf{m} + 2\mathbf{n}$ при $|\mathbf{m}| = 3$, $|\mathbf{n}| = 5$, $(\widehat{\mathbf{m}, \mathbf{n}}) = \frac{\pi}{6}$.
7. Вычислить объем параллелепипеда $ABCDEFGH$, площадь грани $ABCD$ и высоту, опущенную на эту грань из вершины E . $A(8; 4; -5)$, $B(5; 6; -2)$, $D(14; 1; -10)$, $E(10; 1; -7)$.
8. Составить уравнение плоскости, проходящей через точки $A(8; 6; 10)$, $B(12; 5; 9)$, $C(7; 7; 10)$, и найти расстояние от точки $S(-3; 6; -5)$ до этой плоскости.
9. Составить уравнение плоскости π , проходящей через точку $M(-8; -3; 0)$ параллельно прямой $\frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z+6}{4}$ и перпендикулярно плоскости $x + 3y + 3z + 1 = 0$.
10. Составить уравнение прямой AB и найти расстояние от точки C до этой прямой, если $A(5; 9; 7)$, $B(2; 11; 6)$, $C(3; 10; 7)$.
11. Привести к каноническому виду общие уравнения прямой
$$\begin{cases} 3x + y + 6 = 0 \\ -8x - 2y + z - 29 = 0 \end{cases}.$$
12. Найти координаты точки M_1 , симметричной точке $M(-2; 0; -2)$ относительно плоскости $-x + y - 2z = -9$.
13. Найти угол между прямой $l : \frac{x-4}{-4} = \frac{y+4}{-1} = \frac{z+5}{3}$ и плоскостью $\pi : -x - y + 2z - 12 = 0$.

Вариант 7.

1. В параллелепипеде $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ $\overline{AB} = \mathbf{a}$, $\overline{AD} = \mathbf{b}$, $\overline{AA_1} = \mathbf{c}$. Выразить через \mathbf{a} , \mathbf{b} , \mathbf{c} вектор $\mathbf{q} = \overline{KM}$, где K – середина ребра AB , а M делит ребро $B_1 C_1$ в отношении $1 : 2$.
2. Доказать, что векторы $\mathbf{a}(1; -1; -2)$, $\mathbf{b}(2; 3; -1)$, $\mathbf{c}(-1; -3; 0)$ образуют базис. Разложить вектор $\mathbf{d}(4; -2; -8)$ по этим векторам.
3. Найти косинус угла между векторами $\mathbf{a} = 2\mathbf{m} - \mathbf{n}$ и $\mathbf{b} = 7\mathbf{m} - \mathbf{n}$ при $|\mathbf{m}| = 1$, $|\mathbf{n}| = 2\sqrt{2}$, $(\widehat{\mathbf{m}, \mathbf{n}}) = \frac{\pi}{4}$.
4. Найти $\text{pr}_{\mathbf{y}} \mathbf{x}$, при $\mathbf{x} = 3\mathbf{a} + \mathbf{c}$ и $\mathbf{y} = \mathbf{b}$, где $\mathbf{a}(-5; -2; 7)$, $\mathbf{b}(2; 1; -3)$, $\mathbf{c}(12; 1; -24)$.
5. Найти координаты единичного вектора \mathbf{n}_0 , перпендикулярного плоскости $\triangle ABC$, где $A(7; 8; 2)$, $B(4; 7; 1)$, $C(6; 7; 0)$.
6. Вычислить площадь параллелограмма, построенного на векторах $\mathbf{a} = 4\mathbf{m} + \mathbf{n}$ и $\mathbf{b} = \mathbf{m} - 2\mathbf{n}$ при $|\mathbf{m}| = 3$, $|\mathbf{n}| = 3$, $(\widehat{\mathbf{m}, \mathbf{n}}) = \frac{\pi}{3}$.
7. Вычислить объем тетраэдра с вершинами в точках P, Q, R, S , площадь грани QRS и высоту, опущенную на эту грань из вершины P . $P(0; 9; 8)$, $Q(2; 9; 7)$, $R(9; 0; 8)$, $S(10; 8; 4)$.
8. Задана пирамида $SABC$ координатами вершин $A(2; -3; 5)$, $B(1; -11; 2)$, $C(3; 2; 7)$, $S(7; -4; 0)$:
а) составить уравнение плоскости ABC ,
б) найти расстояние от вершины S до плоскости ABC .
9. Составить канонические уравнения прямой, проходящей через точку $M(3; -7; 6)$ параллельно плоскости $-4x + y = 7$ и перпендикулярно прямой $\frac{x-6}{-3} = \frac{y+3}{2} = \frac{z+7}{1}$.
10. Составить уравнение прямой AB и найти расстояние от точки C до этой прямой, если $A(8; 9; 1)$, $B(9; 6; 6)$, $C(9; 7; 4)$.
11. Привести к каноническому виду общие уравнения прямой
$$\begin{cases} -x + 2y - 3z - 16 = 0 \\ -2x + 3y - 2z - 13 = 0 \end{cases}$$
.
12. Найти проекцию точки $M(-19; 20; -13)$ на плоскость $-9x + 8y - 6z = 47$.
13. Найти угол между прямой $l : \frac{x+8}{4} = \frac{y}{2} = \frac{z+1}{-2}$ и плоскостью $\pi : 2x - y - z - 5 = 0$.

Вариант 8.

1. В параллелепипеде $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ $\overline{AB} = \mathbf{a}$, $\overline{AD} = \mathbf{b}$, $\overline{AA_1} = \mathbf{c}$. Выразить через \mathbf{a} , \mathbf{b} , \mathbf{c} вектор $\mathbf{q} = \overline{KM}$, где K – середина ребра AB , а M делит ребро CC_1 в отношении 3 : 1.
2. Доказать, что векторы $\mathbf{a}(1; -3; -2)$, $\mathbf{b}(-2; 5; 3)$, $\mathbf{c}(1; -4; -2)$ образуют базис. Разложить вектор $\mathbf{d}(0; 6; 1)$ по этим векторам.
3. Найти косинус угла между векторами $\mathbf{a} = -\mathbf{m} + 2\mathbf{n}$ и $\mathbf{b} = -2\mathbf{m} + 3\mathbf{n}$ при $|\mathbf{m}| = 2$, $|\mathbf{n}| = \sqrt{2}$, $(\widehat{\mathbf{m}, \mathbf{n}}) = \frac{\pi}{4}$.
4. Найти $\text{pr}_{\mathbf{y}} \mathbf{x}$, при $\mathbf{x} = \mathbf{b} + 2\mathbf{c}$ и $\mathbf{y} = \mathbf{a}$, где $\mathbf{a}(1; 1; -1)$, $\mathbf{b}(2; 1; -9)$, $\mathbf{c}(-1; 2; 5)$.
5. Найти координаты единичного вектора \mathbf{n}_0 , перпендикулярного плоскости $\triangle ABC$, где $A(5; 0; 9)$, $B(4; -1; 4)$, $C(7; 1; 11)$.
6. Вычислить площадь параллелограмма, построенного на векторах $\mathbf{a} = 3\mathbf{m} - \mathbf{n}$ и $\mathbf{b} = -4\mathbf{m} + 3\mathbf{n}$ при $|\mathbf{m}| = 4$, $|\mathbf{n}| = 1$, $(\widehat{\mathbf{m}, \mathbf{n}}) = \frac{\pi}{4}$.
7. Вычислить объем тетраэдра с вершинами в точках A_1, A_2, A_3, A_4 , площадь грани $A_1 A_2 A_4$ и высоту, опущенную на эту грань из вершины A_3 . $A_1(3; 6; 0)$, $A_2(-1; 8; -1)$, $A_3(10; 13; -5)$, $A_4(12; 7; -1)$.
8. Составить уравнение плоскости, проходящей через точки $A(0; 1; -1)$, $B(7; -2; 0)$, $C(10; -3; 0)$, и найти расстояние от точки $S(0; -6; -2)$ до этой плоскости.
9. Составить канонические уравнения прямой, проходящей через точку $M(-6; -1; 5)$ параллельно плоскости $2x + 7y - z + 7 = 0$ и перпендикулярно прямой $\frac{x+6}{-1} = \frac{y-6}{-4} = \frac{z+2}{1}$.
10. Составить уравнение прямой AB и найти расстояние от точки C до этой прямой, если $A(4; 5; 7)$, $B(3; 0; 11)$, $C(5; 9; 4)$.
11. Привести к каноническому виду общие уравнения прямой
$$\begin{cases} x - 2y + 3 = 0 \\ -3x + 7y + z - 10 = 0 \end{cases}$$
.
12. Найти проекцию точки $M(1; -10; -15)$ на плоскость $3x + 10y + 8z = 129$.
13. Найти угол между прямой $l : \frac{x-2}{1} = \frac{y+6}{-1} = \frac{z-1}{1}$ и плоскостью $\pi : 5x + y - 5z = 13$.

Вариант 9.

1. В параллелепипеде $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ $\overline{AB} = \mathbf{a}$, $\overline{AD} = \mathbf{b}$, $\overline{AA_1} = \mathbf{c}$. Выразить через \mathbf{a} , \mathbf{b} , \mathbf{c} вектор $\mathbf{q} = \overline{KM}$, где K – середина ребра AA_1 , а M делит ребро $B_1 C_1$ в отношении 3 : 1.
2. Доказать, что векторы $\mathbf{a}(-2; 3; 4)$, $\mathbf{b}(-3; 4; 5)$, $\mathbf{c}(1; 0; -3)$ образуют базис. Разложить вектор $\mathbf{d}(1; -1; -1)$ по этим векторам.
3. Найти косинус угла между векторами $\mathbf{a} = -4\mathbf{m} - 3\mathbf{n}$ и $\mathbf{b} = 4\mathbf{m} + 2\mathbf{n}$ при $|\mathbf{m}| = \sqrt{3}$, $|\mathbf{n}| = 2$, $(\widehat{\mathbf{m}, \mathbf{n}}) = \frac{5\pi}{6}$.
4. Найти $\text{pr}_{\mathbf{y}} \mathbf{x}$, при $\mathbf{x} = \mathbf{b}$ и $\mathbf{y} = 2\mathbf{a} + 2\mathbf{c}$, где $\mathbf{a}(-1; 1; -1)$, $\mathbf{b}(-3; 1; -4)$, $\mathbf{c}(4; -3; -1)$.
5. Найти координаты единичного вектора \mathbf{n}_0 , перпендикулярного плоскости $\triangle ABC$, где $A(5; 4; 9)$, $B(-5; 5; 8)$, $C(4; 5; 9)$.
6. Вычислить площадь треугольника, построенного на векторах $\mathbf{a} = 4\mathbf{m} - \mathbf{n}$ и $\mathbf{b} = 2\mathbf{m} - 2\mathbf{n}$ при $|\mathbf{m}| = 1$, $|\mathbf{n}| = 2$, $(\widehat{\mathbf{m}, \mathbf{n}}) = \frac{\pi}{3}$.
7. Вычислить объем параллелепипеда $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$, площадь грани $ABCD$ и высоту, опущенную на эту грань из вершины A_1 . $A(-4; 7; -6)$, $B(-6; 10; -10)$, $D(-7; 8; -3)$, $A_1(-1; 3; -2)$.
8. Составить уравнение плоскости, проходящей через точки $A(8; 4; 7)$, $B(11; 7; 5)$, $C(6; 3; 8)$, и найти расстояние от точки $S(-6; -4; -1)$ до этой плоскости.
9. Составить уравнение плоскости π , проходящей через точку $M(-10; 8; 6)$ перпендикулярно плоскостям $-x + y - 2z = 5$ и $2x + 2y - 3z = 2$.
10. Составить уравнение прямой AB и найти расстояние от точки C до этой прямой, если $A(1; 3; 6)$, $B(-1; 2; 6)$, $C(8; 6; 5)$.
11. Привести к каноническому виду общие уравнения прямой
$$\begin{cases} 4x + 2y - z + 4 = 0 \\ 3x + 3y - z + 5 = 0 \end{cases}.$$
12. Найти координаты точки M_1 , симметричной точке $M(6; -9; -14)$ относительно плоскости $6x - 5y - 7z - 14 = 0$.
13. Найти угол между прямой $l : \frac{x-6}{3} = \frac{y-4}{1} = \frac{z+4}{-1}$ и плоскостью $\pi : x - y - 3z = -4$.

Вариант 10.

1. В параллелепипеде $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ $\overline{AB} = \mathbf{a}$, $\overline{AD} = \mathbf{b}$, $\overline{AA_1} = \mathbf{c}$. Выразить через \mathbf{a} , \mathbf{b} , \mathbf{c} вектор $\mathbf{q} = \overline{KM}$, где K – середина ребра AA_1 , а M делит ребро DC в отношении 1 : 2.
2. Доказать, что векторы $\mathbf{a}(-1; -2; 1)$, $\mathbf{b}(-1; 5; -3)$, $\mathbf{c}(2; 3; -2)$ образуют базис. Разложить вектор $\mathbf{d}(-10; 5; -2)$ по этим векторам.
3. Найти косинус угла между векторами $\mathbf{a} = -2\mathbf{m} + \mathbf{n}$ и $\mathbf{b} = -9\mathbf{m} + 3\mathbf{n}$ при $|\mathbf{m}| = 1$, $|\mathbf{n}| = 2\sqrt{3}$, $(\widehat{\mathbf{m}, \mathbf{n}}) = \frac{\pi}{6}$.
4. Найти $\text{pr}_{\mathbf{y}} \mathbf{x}$, при $\mathbf{x} = \mathbf{b}$ и $\mathbf{y} = 3\mathbf{a} + 3\mathbf{c}$, где $\mathbf{a}(2; 1; 4)$, $\mathbf{b}(2; 4; 5)$, $\mathbf{c}(-2; 1; -4)$.
5. Найти координаты единичного вектора \mathbf{n}_0 , перпендикулярного плоскости $\triangle ABC$, где $A(0; 4; 4)$, $B(-1; 6; 5)$, $C(-4; 5; 5)$.
6. Вычислить площадь треугольника, построенного на векторах $\mathbf{a} = -2\mathbf{m} + 3\mathbf{n}$ и $\mathbf{b} = 4\mathbf{m} + 2\mathbf{n}$ при $|\mathbf{m}| = 2$, $|\mathbf{n}| = 5$, $(\widehat{\mathbf{m}, \mathbf{n}}) = \frac{3\pi}{4}$.
7. Вычислить объем тетраэдра с вершинами в точках A, B, C, D , площадь грани BCD и высоту, опущенную на эту грань из вершины A . $A(-9; 8; 17)$, $B(-2; 8; 9)$, $C(-2; 9; 6)$, $D(1; 6; 9)$.
8. Составить уравнение плоскости, проходящей через точки $A(0; 2; 8)$, $B(1; 3; 8)$, $C(2; -2; 9)$, и найти расстояние от точки $S(-2; 2; -1)$ до этой плоскости.
9. Составить уравнение плоскости π , проходящей через точку $M(6; -9; 0)$ перпендикулярно плоскостям $-x + y - z = -3$ и $2x + y + z = 0$.
10. Составить уравнение прямой AB и найти расстояние от точки C до этой прямой, если $A(2; 8; 2)$, $B(3; 11; 0)$, $C(1; 6; 3)$.
11. Привести к каноническому виду общие уравнения прямой
$$\begin{cases} x + 3y - 3z - 10 = 0 \\ -2x - 8y + 7z + 13 = 0 \end{cases}.$$
12. Найти координаты точки M_1 , симметричной точке $M(9; 10; 6)$ относительно плоскости $6x + 9y + z + 27 = 0$.
13. Найти угол между прямой $l : \frac{x-6}{-3} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z-5}{-3}$ и плоскостью $\pi : -x + 2y + 2z - 8 = 0$.

Вариант 11.

1. В параллелепипеде $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ $\overline{AB} = \mathbf{a}$, $\overline{AD} = \mathbf{b}$, $\overline{AA_1} = \mathbf{c}$. Выразить через \mathbf{a} , \mathbf{b} , \mathbf{c} вектор $\mathbf{q} = \overline{KM}$, где K – середина ребра AA_1 , а M делит ребро BC в отношении $2 : 3$.
2. Доказать, что векторы $\mathbf{a}(-5; 3; -5)$, $\mathbf{b}(-2; 1; -1)$, $\mathbf{c}(-2; 0; -1)$ образуют базис. Разложить вектор $\mathbf{d}(4; -3; 2)$ по этим векторам.
3. Найти косинус угла между векторами $\mathbf{a} = 3\mathbf{m} - 3\mathbf{n}$ и $\mathbf{b} = \mathbf{m} + \mathbf{n}$ при $|\mathbf{m}| = 2$, $|\mathbf{n}| = \sqrt{3}$, $(\widehat{\mathbf{m}, \mathbf{n}}) = \frac{\pi}{6}$.
4. Найти $\text{pr}_y \mathbf{x}$, при $\mathbf{x} = \mathbf{b}$ и $\mathbf{y} = \mathbf{a} + 2\mathbf{c}$, где $\mathbf{a}(-16; -19; -12)$, $\mathbf{b}(-3; -4; -4)$, $\mathbf{c}(6; 7; 6)$.
5. Найти координаты единичного вектора \mathbf{n}_0 , перпендикулярного плоскости $\triangle ABC$, где $A(8; 9; 7)$, $B(10; 10; 8)$, $C(13; 10; 9)$.
6. Вычислить площадь треугольника, построенного на векторах $\mathbf{a} = -4\mathbf{m} - 4\mathbf{n}$ и $\mathbf{b} = -4\mathbf{m} + 3\mathbf{n}$ при $|\mathbf{m}| = 2$, $|\mathbf{n}| = 3$, $(\widehat{\mathbf{m}, \mathbf{n}}) = \frac{3\pi}{4}$.
7. Вычислить объем параллелепипеда $A_1 A_2 A_3 A_4 B_1 B_2 B_3 B_4$, площадь грани $A_1 A_2 A_3 A_4$ и высоту, опущенную на эту грань из вершины B_1 . $A_1(9; 6; -5)$, $A_2(11; 7; -6)$, $A_4(14; 8; -12)$, $B_1(18; 11; -10)$.
8. Задана пирамида $SABC$ координатами вершин $A(5; 2; 0)$, $B(7; 5; -1)$, $C(4; 0; 1)$, $S(-6; -2; -5)$:
а) составить уравнение плоскости ABC ,
б) найти расстояние от вершины S до плоскости ABC .
9. Составить уравнение плоскости π , проходящей через точку $M(1; -8; -10)$ параллельно прямой $\frac{x-4}{-5} = \frac{y-1}{1} = \frac{z+3}{0}$ и перпендикулярно плоскости $-4x - y + z + 4 = 0$.
10. Составить уравнение прямой AB и найти расстояние от точки C до этой прямой, если $A(2; 1; 9)$, $B(5; 2; 11)$, $C(4; 2; 10)$.
11. Привести к каноническому виду общие уравнения прямой
$$\begin{cases} -5x - 7y - 4z - 7 = 0 \\ -2x - 3y - 3z + 2 = 0 \end{cases}$$
.
12. Найти координаты точки M_1 , симметричной точке $M(3; 2; 5)$ относительно плоскости $9x - 3y + 2z = -16$.
13. Найти угол между прямой $l : \frac{x-3}{3} = \frac{y-7}{2} = \frac{z+7}{-1}$ и плоскостью $\pi : 2x - 2y - z = 0$.

Вариант 12.

1. В параллелепипеде $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ $\overline{AB} = \mathbf{a}$, $\overline{AD} = \mathbf{b}$, $\overline{AA_1} = \mathbf{c}$. Выразить через \mathbf{a} , \mathbf{b} , \mathbf{c} вектор $\mathbf{q} = \overline{KM}$, где K – середина ребра AB , а M делит ребро CC_1 в отношении 1 : 2.
2. Доказать, что векторы $\mathbf{a}(2; -3; -3)$, $\mathbf{b}(1; -2; -1)$, $\mathbf{c}(-3; 1; 3)$ образуют базис. Разложить вектор $\mathbf{d}(3; 0; -4)$ по этим векторам.
3. Найти косинус угла между векторами $\mathbf{a} = 2\mathbf{m} + 4\mathbf{n}$ и $\mathbf{b} = -\mathbf{m} - \mathbf{n}$ при $|\mathbf{m}| = \sqrt{3}$, $|\mathbf{n}| = 2$, $(\widehat{\mathbf{m}, \mathbf{n}}) = \frac{5\pi}{6}$.
4. Найти $\text{pr}_{\mathbf{y}} \mathbf{x}$, при $\mathbf{x} = 2\mathbf{a} + \mathbf{c}$ и $\mathbf{y} = \mathbf{b}$, где $\mathbf{a}(-3; 3; -1)$, $\mathbf{b}(5; -5; -4)$, $\mathbf{c}(7; -6; -4)$.
5. Найти координаты единичного вектора \mathbf{n}_0 , перпендикулярного плоскости $\triangle ABC$, где $A(2; 9; 8)$, $B(3; 11; 11)$, $C(3; 8; 7)$.
6. Вычислить площадь треугольника, построенного на векторах $\mathbf{a} = -2\mathbf{m} + 3\mathbf{n}$ и $\mathbf{b} = -4\mathbf{m} + 4\mathbf{n}$ при $|\mathbf{m}| = 3$, $|\mathbf{n}| = 1$, $(\widehat{\mathbf{m}, \mathbf{n}}) = \frac{\pi}{3}$.
7. Вычислить объем параллелепипеда $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$, площадь грани $ABCD$ и высоту, опущенную на эту грань из вершины A_1 . $A(8; 0; -9)$, $B(11; 4; -6)$, $D(10; 5; -6)$, $A_1(5; -2; -11)$.
8. Составить уравнение плоскости, проходящей через точки $A(-10; -2; 5)$, $B(-11; -7; 5)$, $C(-11; -4; 4)$, и найти расстояние от точки $S(-1; 6; 1)$ до этой плоскости.
9. Составить уравнение плоскости π , проходящей через точку $M(1; 2; 1)$ параллельно прямым $\frac{x-4}{1} = \frac{y+7}{-1} = \frac{z-4}{-3}$ и $\frac{x-5}{1} = \frac{y+8}{-3} = \frac{z+4}{-2}$.
10. Составить уравнение прямой AB и найти расстояние от точки C до этой прямой, если $A(8; 1; 6)$, $B(15; -3; 16)$, $C(10; 0; 9)$.
11. Привести к каноническому виду общие уравнения прямой
$$\begin{cases} -3x + y + 9 = 0 \\ 8x - y + z - 24 = 0 \end{cases}.$$
12. Найти проекцию точки $M(-17; 36; 37)$ на плоскость $-7x + 9y + 10z = 123$.
13. Найти угол между прямой $l : \frac{x+6}{-1} = \frac{y-3}{1} = \frac{z+2}{-5}$ и плоскостью $\pi : -x - y + z + 6 = 0$.

Вариант 13.

1. В параллелепипеде $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ $\overline{AB} = \mathbf{a}$, $\overline{AD} = \mathbf{b}$, $\overline{AA_1} = \mathbf{c}$. Выразить через \mathbf{a} , \mathbf{b} , \mathbf{c} вектор $\mathbf{q} = \overline{KM}$, где K – середина ребра $A_1 D_1$, а M делит ребро DC в отношении $2 : 3$.
2. Доказать, что векторы $\mathbf{a}(-3; 4; 5)$, $\mathbf{b}(-2; 3; 4)$, $\mathbf{c}(5; -4; -1)$ образуют базис. Разложить вектор $\mathbf{d}(7; -7; -5)$ по этим векторам.
3. Найти косинус угла между векторами $\mathbf{a} = \mathbf{m} + 2\mathbf{n}$ и $\mathbf{b} = 5\mathbf{m} + 4\mathbf{n}$ при $|\mathbf{m}| = 2$, $|\mathbf{n}| = \sqrt{3}$, $(\widehat{\mathbf{m}, \mathbf{n}}) = \frac{5\pi}{6}$.
4. Найти $\text{pr}_{\mathbf{y}} \mathbf{x}$, при $\mathbf{x} = \mathbf{a} + 3\mathbf{c}$ и $\mathbf{y} = \mathbf{b}$, где $\mathbf{a}(-3; 11; 7)$, $\mathbf{b}(-5; -2; -1)$, $\mathbf{c}(-1; -2; -2)$.
5. Найти координаты единичного вектора \mathbf{n}_0 , перпендикулярного плоскости $\triangle ABC$, где $A(8; 9; 9)$, $B(9; 11; 12)$, $C(7; 10; 7)$.
6. Вычислить площадь параллелограмма, построенного на векторах $\mathbf{a} = 2\mathbf{m} - 3\mathbf{n}$ и $\mathbf{b} = -4\mathbf{m} - \mathbf{n}$ при $|\mathbf{m}| = 2$, $|\mathbf{n}| = 5$, $(\widehat{\mathbf{m}, \mathbf{n}}) = \frac{\pi}{4}$.
7. Вычислить объем тетраэдра с вершинами в точках A, B, C, D , площадь грани BCD и высоту, опущенную на эту грань из вершины A . $A(4; 3; 5)$, $B(0; -5; 2)$, $C(-7; 1; -2)$, $D(1; -2; 3)$.
8. Задана пирамида $SABC$ координатами вершин $A(-10; -7; 2)$, $B(-13; -5; 3)$, $C(-9; -6; 3)$, $S(-6; 3; -4)$:
а) составить уравнение плоскости ABC ,
б) найти расстояние от вершины S до плоскости ABC .
9. Составить уравнение плоскости π , проходящей через точку $M(-5; -2; -6)$ параллельно прямой $\frac{x+1}{1} = \frac{y+8}{-2} = \frac{z-3}{0}$ и $\frac{x-5}{2} = \frac{y-6}{1} = \frac{z+4}{1}$.
10. Составить уравнение прямой AB и найти расстояние от точки C до этой прямой, если $A(5; 7; 3)$, $B(13; 6; 10)$, $C(-2; 8; -3)$.
11. Привести к каноническому виду общие уравнения прямой
$$\begin{cases} 4x + y + 26 = 0 \\ 3x + 2y + z + 8 = 0 \end{cases}.$$
12. Найти проекцию точки $M(23; -1; 16)$ на плоскость $8x + 2y + 5z = -110$.
13. Найти угол между прямой $l : \frac{x+5}{2} = \frac{y-3}{-1} = \frac{z+1}{1}$ и плоскостью $\pi : 4x - y + 2z - 9 = 0$.

Вариант 14.

1. В параллелепипеде $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ $\overline{AB} = \mathbf{a}$, $\overline{AD} = \mathbf{b}$, $\overline{AA_1} = \mathbf{c}$. Выразить через \mathbf{a} , \mathbf{b} , \mathbf{c} вектор $\mathbf{q} = \overline{KM}$, где K – середина ребра $D_1 C_1$, а M делит ребро BB_1 в отношении 3 : 2.
2. Доказать, что векторы $\mathbf{a}(3; -2; -5)$, $\mathbf{b}(-1; -6; -2)$, $\mathbf{c}(-2; 1; 3)$ образуют базис. Разложить вектор $\mathbf{d}(-3; -4; 2)$ по этим векторам.
3. Найти косинус угла между векторами $\mathbf{a} = 2\mathbf{m} - 7\mathbf{n}$ и $\mathbf{b} = \mathbf{m} - 5\mathbf{n}$ при $|\mathbf{m}| = 2\sqrt{3}$, $|\mathbf{n}| = 1$, $(\widehat{\mathbf{m}, \mathbf{n}}) = \frac{\pi}{6}$.
4. Найти $\text{pr}_{\mathbf{y}} \mathbf{x}$, при $\mathbf{x} = \mathbf{a}$ и $\mathbf{y} = \mathbf{b} + 3\mathbf{c}$, где $\mathbf{a}(1; -2; 1)$, $\mathbf{b}(-2; 19; -8)$, $\mathbf{c}(2; -5; 2)$.
5. Найти координаты единичного вектора \mathbf{n}_0 , перпендикулярного плоскости $\triangle ABC$, где $A(1; 6; 1)$, $B(0; 9; -1)$, $C(-3; 8; 0)$.
6. Вычислить площадь параллелограмма, построенного на векторах $\mathbf{a} = -3\mathbf{m} - 3\mathbf{n}$ и $\mathbf{b} = -3\mathbf{m} + 4\mathbf{n}$ при $|\mathbf{m}| = 5$, $|\mathbf{n}| = 1$, $(\widehat{\mathbf{m}, \mathbf{n}}) = \frac{5\pi}{6}$.
7. Вычислить объем тетраэдра с вершинами в точках A_1, A_2, A_3, A_4 , площадь грани $A_1 A_3 A_4$ и высоту, опущенную на эту грань из вершины A_2 . $A_1(0; 0; 0)$, $A_2(1; -3; -3)$, $A_3(-2; 8; 7)$, $A_4(3; 5; 7)$.
8. Задана пирамида $SABC$ координатами вершин $A(9; -7; -5)$, $B(10; -5; -3)$, $C(11; -4; 0)$, $S(0; 2; -2)$:
а) составить уравнение плоскости ABC ,
б) найти расстояние от вершины S до плоскости ABC .
9. Составить уравнение плоскости π , проходящей через точку $M(-4; 0; 9)$ параллельно прямой $\frac{x-3}{-3} = \frac{y-1}{1} = \frac{z+8}{0}$ и перпендикулярно плоскости $-5x - y + z + 3 = 0$.
10. Составить уравнение прямой AB и найти расстояние от точки C до этой прямой, если $A(4; 3; 8)$, $B(13; 7; 3)$, $C(-3; 0; 12)$.
11. Привести к каноническому виду общие уравнения прямой
$$\begin{cases} -2x + 2y + 3z + 17 = 0 \\ -x - y - z + 6 = 0 \end{cases}.$$
12. Найти проекцию точки $M(12; 2; 12)$ на плоскость $6x + 2y + 3z = -35$.
13. Найти угол между прямой $l : \frac{x+5}{3} = \frac{y+5}{2} = \frac{z+4}{2}$ и плоскостью $\pi : x + 2y + 2z = 10$.

Вариант 15.

1. В параллелепипеде $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ $\overline{AB} = \mathbf{a}$, $\overline{AD} = \mathbf{b}$, $\overline{AA_1} = \mathbf{c}$. Выразить через \mathbf{a} , \mathbf{b} , \mathbf{c} вектор $\mathbf{q} = \overline{KM}$, где K – середина ребра AD , а M делит ребро BB_1 в отношении $1 : 2$.
2. Доказать, что векторы $\mathbf{a}(-1; 2; -1)$, $\mathbf{b}(-1; -4; 3)$, $\mathbf{c}(-2; -1; 2)$ образуют базис. Разложить вектор $\mathbf{d}(4; 5; -4)$ по этим векторам.
3. Найти косинус угла между векторами $\mathbf{a} = -\mathbf{m} - \mathbf{n}$ и $\mathbf{b} = -\mathbf{m} + \mathbf{n}$ при $|\mathbf{m}| = 2\sqrt{3}$, $|\mathbf{n}| = 1$, $(\widehat{\mathbf{m}, \mathbf{n}}) = \frac{\pi}{6}$.
4. Найти $\text{pr}_{\mathbf{y}} \mathbf{x}$, при $\mathbf{x} = \mathbf{b}$ и $\mathbf{y} = \mathbf{a} + \mathbf{c}$, где $\mathbf{a}(1; -2; -4)$, $\mathbf{b}(3; -3; -7)$, $\mathbf{c}(5; -1; 6)$.
5. Найти координаты единичного вектора \mathbf{n}_0 , перпендикулярного плоскости $\triangle ABC$, где $A(8; 4; 0)$, $B(9; 7; 2)$, $C(7; 2; -3)$.
6. Вычислить площадь треугольника, построенного на векторах $\mathbf{a} = -4\mathbf{m} - \mathbf{n}$ и $\mathbf{b} = -2\mathbf{m} + 2\mathbf{n}$ при $|\mathbf{m}| = 5$, $|\mathbf{n}| = 3$, $(\widehat{\mathbf{m}, \mathbf{n}}) = \frac{3\pi}{4}$.
7. Вычислить объем параллелепипеда $ABCDEFGH$, площадь грани $ABCD$ и высоту, опущенную на эту грань из вершины E . $A(-7; -3; 5)$, $B(-10; 1; 3)$, $D(1; -10; 6)$, $E(-10; -1; 5)$.
8. Составить уравнение плоскости, проходящей через точки $A(5; -3; 5)$, $B(6; -2; 4)$, $C(3; -1; 4)$, и найти расстояние от точки $S(4; 7; 0)$ до этой плоскости.
9. Составить уравнение плоскости π , проходящей через точку $M(-9; 4; 5)$ параллельно прямым $\frac{x-1}{2} = \frac{y-3}{1} = \frac{z+4}{-1}$ и $\frac{x-3}{-3} = \frac{y-4}{-5} = \frac{z-3}{2}$.
10. Составить уравнение прямой AB и найти расстояние от точки C до этой прямой, если $A(5; 6; 5)$, $B(7; 5; 8)$, $C(4; 7; 4)$.
11. Привести к каноническому виду общие уравнения прямой
$$\begin{cases} 2x - y + z - 1 = 0 \\ 7x - y + 16 = 0 \end{cases}.$$
12. Найти координаты точки M_1 , симметричной точке $M(6; 1; 10)$ относительно плоскости $7x - 2y + 5z = -27$.
13. Найти угол между прямой $l : \frac{x}{-2} = \frac{y+6}{-1} = \frac{z+1}{2}$ и плоскостью $\pi : -3x - 3y + z - 10 = 0$.

Вариант 16.

1. В параллелепипеде $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ $\overline{AB} = \mathbf{a}$, $\overline{AD} = \mathbf{b}$, $\overline{AA_1} = \mathbf{c}$. Выразить через \mathbf{a} , \mathbf{b} , \mathbf{c} вектор $\mathbf{q} = \overline{KM}$, где K – середина ребра AB , а M делит ребро CC_1 в отношении $2 : 1$.
2. Доказать, что векторы $\mathbf{a}(1; -2; -1)$, $\mathbf{b}(-4; 3; 4)$, $\mathbf{c}(-4; 2; 3)$ образуют базис. Разложить вектор $\mathbf{d}(-5; -2; 3)$ по этим векторам.
3. Найти косинус угла между векторами $\mathbf{a} = -5\mathbf{m} + 4\mathbf{n}$ и $\mathbf{b} = 2\mathbf{m} - \mathbf{n}$ при $|\mathbf{m}| = 1$, $|\mathbf{n}| = 2$, $(\widehat{\mathbf{m}, \mathbf{n}}) = \frac{\pi}{3}$.
4. Найти $\text{pr}_{\mathbf{y}} \mathbf{x}$, при $\mathbf{x} = \mathbf{b}$ и $\mathbf{y} = \mathbf{a} + 3\mathbf{c}$, где $\mathbf{a}(2; 11; 11)$, $\mathbf{b}(-1; -3; -3)$, $\mathbf{c}(-1; -3; -4)$.
5. Найти координаты единичного вектора \mathbf{n}_0 , перпендикулярного плоскости $\triangle ABC$, где $A(2; 0; 4)$, $B(5; -1; 4)$, $C(-6; 2; 3)$.
6. Вычислить площадь треугольника, построенного на векторах $\mathbf{a} = 4\mathbf{m} + 2\mathbf{n}$ и $\mathbf{b} = \mathbf{m} - 2\mathbf{n}$ при $|\mathbf{m}| = 2$, $|\mathbf{n}| = 1$, $(\widehat{\mathbf{m}, \mathbf{n}}) = \frac{3\pi}{4}$.
7. Вычислить объем параллелепипеда $A_1 A_2 A_3 A_4 B_1 B_2 B_3 B_4$, площадь грани $A_1 A_2 A_3 A_4$ и высоту, опущенную на эту грань из вершины B_1 . $A_1(3; -5; -5)$, $A_2(7; -3; -6)$, $A_4(-4; -8; -3)$, $B_1(12; -1; -8)$.
8. Составить уравнение плоскости, проходящей через точки $A(4; -2; -5)$, $B(5; -1; -4)$, $C(11; -3; -5)$, и найти расстояние от точки $S(0; 8; -5)$ до этой плоскости.
9. Составить уравнение плоскости π , проходящей через точку $M(5; 6; 3)$ параллельно прямым $\frac{x+2}{6} = \frac{y+1}{-2} = \frac{z-3}{-3}$ и $\frac{x+8}{-5} = \frac{y}{1} = \frac{z}{1}$.
10. Составить уравнение прямой AB и найти расстояние от точки C до этой прямой, если $A(4; 7; 9)$, $B(5; 12; 15)$, $C(5; 13; 16)$.
11. Привести к каноническому виду общие уравнения прямой
$$\begin{cases} -3x - y - 2z - 17 = 0 \\ -x - y - 3z + 5 = 0 \end{cases}.$$
12. Найти координаты точки M_1 , симметричной точке $M(-15; 19; -2)$ относительно плоскости $6x - 9y + z = 32$.
13. Найти угол между прямой $l : \frac{x-7}{-1} = \frac{y+4}{6} = \frac{z-4}{2}$ и плоскостью $\pi : -x + y - z = -8$.

Вариант 17.

1. В параллелепипеде $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ $\overline{AB} = \mathbf{a}$, $\overline{AD} = \mathbf{b}$, $\overline{AA_1} = \mathbf{c}$. Выразить через \mathbf{a} , \mathbf{b} , \mathbf{c} вектор $\mathbf{q} = \overline{KM}$, где K – середина ребра BC , а M делит ребро DD_1 в отношении 3 : 1.
2. Доказать, что векторы $\mathbf{a}(-1; 4; 3)$, $\mathbf{b}(-1; -3; -2)$, $\mathbf{c}(-5; -3; -2)$ образуют базис. Разложить вектор $\mathbf{d}(-9; -3; -2)$ по этим векторам.
3. Найти косинус угла между векторами $\mathbf{a} = -3\mathbf{m} + \mathbf{n}$ и $\mathbf{b} = -4\mathbf{m} + 3\mathbf{n}$ при $|\mathbf{m}| = 1$, $|\mathbf{n}| = 2\sqrt{3}$, $(\widehat{\mathbf{m}, \mathbf{n}}) = \frac{\pi}{6}$.
4. Найти $\text{pr}_{\mathbf{y}} \mathbf{x}$, при $\mathbf{x} = \mathbf{a}$ и $\mathbf{y} = 2\mathbf{b} + \mathbf{c}$, где $\mathbf{a}(2; 1; -5)$, $\mathbf{b}(1; 1; -3)$, $\mathbf{c}(-2; -5; 8)$.
5. Найти координаты единичного вектора \mathbf{n}_0 , перпендикулярного плоскости $\triangle ABC$, где $A(2; 0; 4)$, $B(4; 3; 5)$, $C(3; 2; 5)$.
6. Вычислить площадь параллелограмма, построенного на векторах $\mathbf{a} = -\mathbf{m} - 2\mathbf{n}$ и $\mathbf{b} = -\mathbf{m} - 3\mathbf{n}$ при $|\mathbf{m}| = 2$, $|\mathbf{n}| = 2$, $(\widehat{\mathbf{m}, \mathbf{n}}) = \frac{5\pi}{6}$.
7. Вычислить объем параллелепипеда $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$, площадь грани $ABCD$ и высоту, опущенную на эту грань из вершины A_1 . $A(-9; 4; -8)$, $B(-7; 2; -7)$, $D(-3; 0; -13)$, $A_1(-2; -1; -13)$.
8. Задана пирамида $SABC$ координатами вершин $A(10; -2; 1)$, $B(11; -10; 2)$, $C(9; -3; 1)$, $S(1; 7; -7)$:
 а) составить уравнение плоскости ABC ,
 б) найти расстояние от вершины S до плоскости ABC .
9. Составить уравнение плоскости π , проходящей через точку $M(1; 3; 2)$ параллельно прямой $\frac{x-6}{2} = \frac{y-1}{-5} = \frac{z+3}{1}$ и перпендикулярно плоскости $3x - 3y + 2z + 6 = 0$.
10. Составить уравнение прямой AB и найти расстояние от точки C до этой прямой, если $A(0; 7; 6)$, $B(-3; 14; 10)$, $C(2; 2; 3)$.
11. Привести к каноническому виду общие уравнения прямой
$$\begin{cases} -3x + y + z + 21 = 0 \\ -4x - y + 27 = 0 \end{cases}.$$
12. Найти координаты точки M_1 , симметричной точке $M(3; -7; 1)$ относительно плоскости $x - 7y + 2z = 27$.
13. Найти угол между прямой $l : \frac{x}{1} = \frac{y+6}{-1} = \frac{z-4}{2}$ и плоскостью $\pi : x - y - 3z = -4$.

Вариант 18.

1. В параллелепипеде $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ $\overline{AB} = \mathbf{a}$, $\overline{AD} = \mathbf{b}$, $\overline{AA_1} = \mathbf{c}$. Выразить через \mathbf{a} , \mathbf{b} , \mathbf{c} вектор $\mathbf{q} = \overline{KM}$, где K – середина ребра BC , а M делит ребро AA_1 в отношении 1 : 2.
2. Доказать, что векторы $\mathbf{a}(-3; -2; 1)$, $\mathbf{b}(2; 2; -1)$, $\mathbf{c}(6; 1; -2)$ образуют базис. Разложить вектор $\mathbf{d}(-9; 2; 2)$ по этим векторам.
3. Найти косинус угла между векторами $\mathbf{a} = \mathbf{m} + 2\mathbf{n}$ и $\mathbf{b} = -\mathbf{m} - \mathbf{n}$ при $|\mathbf{m}| = 2$, $|\mathbf{n}| = 3$, $(\widehat{\mathbf{m}, \mathbf{n}}) = \frac{2\pi}{3}$.
4. Найти $\text{pr}_{\mathbf{y}} \mathbf{x}$, при $\mathbf{x} = \mathbf{b} + \mathbf{c}$ и $\mathbf{y} = \mathbf{a}$, где $\mathbf{a}(5; -4; 2)$, $\mathbf{b}(2; 3; -3)$, $\mathbf{c}(-2; 2; -1)$.
5. Найти координаты единичного вектора \mathbf{n}_0 , перпендикулярного плоскости $\triangle ABC$, где $A(9; 8; 2)$, $B(4; 9; 3)$, $C(11; 7; 2)$.
6. Вычислить площадь треугольника, построенного на векторах $\mathbf{a} = 2\mathbf{m} - 4\mathbf{n}$ и $\mathbf{b} = -2\mathbf{m} + 3\mathbf{n}$ при $|\mathbf{m}| = 1$, $|\mathbf{n}| = 5$, $(\widehat{\mathbf{m}, \mathbf{n}}) = \frac{5\pi}{6}$.
7. Вычислить объем параллелепипеда $ABCDEFGH$, площадь грани $ABCD$ и высоту, опущенную на эту грань из вершины E . $A(0; 5; 2)$, $B(3; 4; 5)$, $D(-10; 3; 9)$, $E(10; 5; 1)$.
8. Задана пирамида $SABC$ координатами вершин $A(4; -7; 10)$, $B(7; -4; 8)$, $C(9; -5; 9)$, $S(3; -4; -7)$:
а) составить уравнение плоскости ABC ,
б) найти расстояние от вершины S до плоскости ABC .
9. Составить уравнение плоскости π , проходящей через точку $M(-5; -2; 10)$ параллельно прямой $\frac{x+6}{1} = \frac{y-5}{2} = \frac{z-6}{-1}$ и $\frac{x+6}{3} = \frac{y+6}{-3} = \frac{z-2}{-2}$.
10. Составить уравнение прямой AB и найти расстояние от точки C до этой прямой, если $A(6; 2; 8)$, $B(4; -1; 4)$, $C(5; 0; 5)$.
11. Привести к каноническому виду общие уравнения прямой
$$\begin{cases} -x + 5y - 6 = 0 \\ 2x - 4y - z + 2 = 0 \end{cases}.$$
12. Найти координаты точки M_1 , симметричной точке $M(-2; -4; -2)$ относительно плоскости $2x + y - z + 9 = 0$.
13. Найти угол между прямой $l : \frac{x+4}{1} = \frac{y-3}{-3} = \frac{z-1}{2}$ и плоскостью $\pi : x + 2y - 2z - 8 = 0$.

Вариант 19.

1. В параллелепипеде $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ $\overline{AB} = \mathbf{a}$, $\overline{AD} = \mathbf{b}$, $\overline{AA_1} = \mathbf{c}$. Выразить через \mathbf{a} , \mathbf{b} , \mathbf{c} вектор $\mathbf{q} = \overline{KM}$, где K – середина ребра $D_1 C_1$, а M делит ребро BB_1 в отношении 3 : 1.
2. Доказать, что векторы $\mathbf{a}(1; 1; -3)$, $\mathbf{b}(2; 3; -1)$, $\mathbf{c}(-4; -5; 1)$ образуют базис. Разложить вектор $\mathbf{d}(-8; -7; 5)$ по этим векторам.
3. Найти косинус угла между векторами $\mathbf{a} = 2\mathbf{m} - 2\mathbf{n}$ и $\mathbf{b} = 3\mathbf{m} - \mathbf{n}$ при $|\mathbf{m}| = 2$, $|\mathbf{n}| = \sqrt{3}$, $(\widehat{\mathbf{m}, \mathbf{n}}) = \frac{\pi}{6}$.
4. Найти $\text{pr}_{\mathbf{y}} \mathbf{x}$, при $\mathbf{x} = \mathbf{a} + 2\mathbf{c}$ и $\mathbf{y} = \mathbf{b}$, где $\mathbf{a}(-1; 5; -1)$, $\mathbf{b}(3; 4; -1)$, $\mathbf{c}(-2; -4; 1)$.
5. Найти координаты единичного вектора \mathbf{n}_0 , перпендикулярного плоскости $\triangle ABC$, где $A(8; 4; 6)$, $B(5; 1; 4)$, $C(10; 8; 7)$.
6. Вычислить площадь треугольника, построенного на векторах $\mathbf{a} = -\mathbf{m} - 3\mathbf{n}$ и $\mathbf{b} = 2\mathbf{m} - 3\mathbf{n}$ при $|\mathbf{m}| = 1$, $|\mathbf{n}| = 1$, $(\widehat{\mathbf{m}, \mathbf{n}}) = \frac{\pi}{6}$.
7. Вычислить объем параллелепипеда $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$, площадь грани $ABCD$ и высоту, опущенную на эту грань из вершины A_1 . $A(9; -7; 8)$, $B(13; -8; 5)$, $D(17; -10; 2)$, $A_1(6; -6; 10)$.
8. Составить уравнение плоскости, проходящей через точки $A(10; 8; -7)$, $B(9; 7; -8)$, $C(7; 10; -6)$, и найти расстояние от точки $S(-6; 2; -4)$ до этой плоскости.
9. Составить уравнение плоскости π , проходящей через точку $M(2; 0; 9)$ параллельно прямым $\frac{x+7}{4} = \frac{y-3}{3} = \frac{z+1}{-3}$ и $\frac{x-1}{-3} = \frac{y+8}{-2} = \frac{z-5}{4}$.
10. Составить уравнение прямой AB и найти расстояние от точки C до этой прямой, если $A(2; 6; 0)$, $B(3; 4; 3)$, $C(4; 3; 4)$.
11. Привести к каноническому виду общие уравнения прямой
$$\begin{cases} x + y + 5 = 0 \\ -5x + y + z - 8 = 0 \end{cases}.$$
12. Найти координаты точки M_1 , симметричной точке $M(14; -19; 5)$ относительно плоскости $4x - 7y + z = 29$.
13. Найти угол между прямой $l : \frac{x+8}{1} = \frac{y-3}{1} = \frac{z+8}{-1}$ и плоскостью $\pi : -5x - 4y - 3z - 12 = 0$.

Вариант 20.

1. В параллелепипеде $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ $\overline{AB} = \mathbf{a}$, $\overline{AD} = \mathbf{b}$, $\overline{AA_1} = \mathbf{c}$. Выразить через \mathbf{a} , \mathbf{b} , \mathbf{c} вектор $\mathbf{q} = \overline{KM}$, где K – середина ребра AD , а M делит ребро BB_1 в отношении $2 : 3$.
2. Доказать, что векторы $\mathbf{a}(-6; 2; -1)$, $\mathbf{b}(6; -1; 4)$, $\mathbf{c}(-1; 1; 2)$ образуют базис. Разложить вектор $\mathbf{d}(-9; 3; -1)$ по этим векторам.
3. Найти косинус угла между векторами $\mathbf{a} = 2\mathbf{m} + \mathbf{n}$ и $\mathbf{b} = \mathbf{m} + \mathbf{n}$ при $|\mathbf{m}| = \sqrt{2}$, $|\mathbf{n}| = 2$, $(\widehat{\mathbf{m}, \mathbf{n}}) = \frac{3\pi}{4}$.
4. Найти $\text{pr}_{\mathbf{y}} \mathbf{x}$, при $\mathbf{x} = 3\mathbf{a} + \mathbf{c}$ и $\mathbf{y} = \mathbf{b}$, где $\mathbf{a}(2; -5; 3)$, $\mathbf{b}(2; -5; 4)$, $\mathbf{c}(-12; 9; -14)$.
5. Найти координаты единичного вектора \mathbf{n}_0 , перпендикулярного плоскости $\triangle ABC$, где $A(0; 2; 7)$, $B(2; 5; 6)$, $C(-1; -2; 8)$.
6. Вычислить площадь треугольника, построенного на векторах $\mathbf{a} = -2\mathbf{m} - 4\mathbf{n}$ и $\mathbf{b} = -\mathbf{m} + \mathbf{n}$ при $|\mathbf{m}| = 1$, $|\mathbf{n}| = 3$, $(\widehat{\mathbf{m}, \mathbf{n}}) = \frac{3\pi}{4}$.
7. Вычислить объем параллелепипеда $A_1 A_2 A_3 A_4 B_1 B_2 B_3 B_4$, площадь грани $A_1 A_2 A_3 A_4$ и высоту, опущенную на эту грань из вершины B_1 . $A_1(-8; 0; 9)$, $A_2(-3; -1; 13)$, $A_4(-2; -2; 10)$, $B_1(-11; 1; 7)$.
8. Задана пирамида $SABC$ координатами вершин $A(1; 6; -8)$, $B(5; 7; -8)$, $C(2; 5; -7)$, $S(-4; -8; 7)$:
 а) составить уравнение плоскости ABC ,
 б) найти расстояние от вершины S до плоскости ABC .
9. Составить уравнение плоскости π , проходящей через точку $M(9; -3; -6)$ параллельно прямой $\frac{x-2}{3} = \frac{y-1}{9} = \frac{z+8}{-4}$ и перпендикулярно плоскости $-2x - 5y + 3z + 2 = 0$.
10. Составить уравнение прямой AB и найти расстояние от точки C до этой прямой, если $A(2; 6; 6)$, $B(4; 1; 14)$, $C(1; 9; 1)$.
11. Привести к каноническому виду общие уравнения прямой
$$\begin{cases} 2x + 2y + z + 13 = 0 \\ -x + 3y + 23 = 0 \end{cases}.$$
12. Найти проекцию точки $M(10; 41; 32)$ на плоскость $5x + 8y + 6z - 70 = 0$.
13. Найти угол между прямой $l : \frac{x+8}{-2} = \frac{y-8}{3} = \frac{z-2}{2}$ и плоскостью $\pi : x - y + 2z + 14 = 0$.

Вариант 21.

1. В параллелепипеде $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ $\overline{AB} = \mathbf{a}$, $\overline{AD} = \mathbf{b}$, $\overline{AA_1} = \mathbf{c}$. Выразить через \mathbf{a} , \mathbf{b} , \mathbf{c} вектор $\mathbf{q} = \overline{KM}$, где K – середина ребра $A_1 D_1$, а M делит ребро AB в отношении 1 : 2.
2. Доказать, что векторы $\mathbf{a}(4; -2; 3)$, $\mathbf{b}(5; -3; 3)$, $\mathbf{c}(-2; 1; -1)$ образуют базис. Разложить вектор $\mathbf{d}(6; -2; 5)$ по этим векторам.
3. Найти косинус угла между векторами $\mathbf{a} = \mathbf{m} - \mathbf{n}$ и $\mathbf{b} = -\mathbf{m} + 4\mathbf{n}$ при $|\mathbf{m}| = 2$, $|\mathbf{n}| = \sqrt{2}$, $(\widehat{\mathbf{m}, \mathbf{n}}) = \frac{\pi}{4}$.
4. Найти $\text{pr}_{\mathbf{y}} \mathbf{x}$, при $\mathbf{x} = \mathbf{b} + 2\mathbf{c}$ и $\mathbf{y} = \mathbf{a}$, где $\mathbf{a}(-2; 1; 2)$, $\mathbf{b}(13; -7; -6)$, $\mathbf{c}(-4; 1; 3)$.
5. Найти координаты единичного вектора \mathbf{n}_0 , перпендикулярного плоскости $\triangle ABC$, где $A(4; 5; 4)$, $B(10; 8; 5)$, $C(5; 4; 4)$.
6. Вычислить площадь треугольника, построенного на векторах $\mathbf{a} = -\mathbf{m} + 2\mathbf{n}$ и $\mathbf{b} = -4\mathbf{m} + 3\mathbf{n}$ при $|\mathbf{m}| = 4$, $|\mathbf{n}| = 1$, $(\widehat{\mathbf{m}, \mathbf{n}}) = \frac{\pi}{4}$.
7. Вычислить объем тетраэдра с вершинами в точках P, Q, R, S , площадь грани PQR и высоту, опущенную на эту грань из вершины S . $P(-1; 1; -9)$, $Q(-10; 2; -9)$, $R(6; -1; -10)$, $S(-8; -2; -11)$.
8. Задана пирамида $SABC$ координатами вершин $A(2; -10; 5)$, $B(3; -9; 4)$, $C(4; -7; 7)$, $S(4; 3; 0)$:
а) составить уравнение плоскости ABC ,
б) найти расстояние от вершины S до плоскости ABC .
9. Составить уравнение плоскости π , проходящей через точку $M(1; -5; -4)$ параллельно прямой $\frac{x-1}{-2} = \frac{y-2}{1} = \frac{z-2}{2}$ и перпендикулярно плоскости $-3x - y - z = -1$.
10. Составить уравнение прямой AB и найти расстояние от точки C до этой прямой, если $A(6; 0; 6)$, $B(5; 2; 3)$, $C(4; 3; 1)$.
11. Привести к каноническому виду общие уравнения прямой
$$\begin{cases} x + y - z - 8 = 0 \\ -8x - y + 2z + 9 = 0 \end{cases}.$$
12. Найти проекцию точки $M(-15; 7; -11)$ на плоскость $-4x + 8y - 3z = -29$.
13. Найти угол между прямой $l : \frac{x-2}{-1} = \frac{y+6}{-5} = \frac{z}{2}$ и плоскостью $\pi : x + 2y + z = -6$.

Вариант 22.

1. В параллелепипеде $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ $\overline{AB} = \mathbf{a}$, $\overline{AD} = \mathbf{b}$, $\overline{AA_1} = \mathbf{c}$. Выразить через \mathbf{a} , \mathbf{b} , \mathbf{c} вектор $\mathbf{q} = \overline{KM}$, где K – середина ребра AD , а M делит ребро CC_1 в отношении 1 : 2.
2. Доказать, что векторы $\mathbf{a}(-3; 5; 0)$, $\mathbf{b}(3; -6; -1)$, $\mathbf{c}(-1; -3; -4)$ образуют базис. Разложить вектор $\mathbf{d}(-4; 4; -2)$ по этим векторам.
3. Найти косинус угла между векторами $\mathbf{a} = 7\mathbf{m} - 2\mathbf{n}$ и $\mathbf{b} = 2\mathbf{m} - \mathbf{n}$ при $|\mathbf{m}| = \sqrt{3}$, $|\mathbf{n}| = 4$, $(\widehat{\mathbf{m}, \mathbf{n}}) = \frac{\pi}{6}$.
4. Найти $\text{pr}_{\mathbf{y}} \mathbf{x}$, при $\mathbf{x} = 2\mathbf{a} + \mathbf{c}$ и $\mathbf{y} = \mathbf{b}$, где $\mathbf{a}(-1; 3; 2)$, $\mathbf{b}(1; 1; 1)$, $\mathbf{c}(8; -7; -6)$.
5. Найти координаты единичного вектора \mathbf{n}_0 , перпендикулярного плоскости $\triangle ABC$, где $A(5; 7; 0)$, $B(-3; 4; 2)$, $C(10; 8; -1)$.
6. Вычислить площадь параллелограмма, построенного на векторах $\mathbf{a} = -3\mathbf{m} + 4\mathbf{n}$ и $\mathbf{b} = -2\mathbf{m} + 4\mathbf{n}$ при $|\mathbf{m}| = 2$, $|\mathbf{n}| = 2$, $(\widehat{\mathbf{m}, \mathbf{n}}) = \frac{\pi}{6}$.
7. Вычислить объем параллелепипеда $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$, площадь грани $ABCD$ и высоту, опущенную на эту грань из вершины A_1 . $A(8; 4; 0)$, $B(6; -2; -3)$, $D(5; -3; -3)$, $A_1(7; 1; -1)$.
8. Задана пирамида $SABC$ координатами вершин $A(-1; 2; -1)$, $B(-6; 1; 0)$, $C(2; 1; -1)$, $S(-7; 0; 1)$:
а) составить уравнение плоскости ABC ,
б) найти расстояние от вершины S до плоскости ABC .
9. Составить уравнение плоскости π , проходящей через точку $M(3; -4; -1)$ перпендикулярно плоскостям $x + 4y = 2$ и $x - y + z - 2 = 0$.
10. Составить уравнение прямой AB и найти расстояние от точки C до этой прямой, если $A(6; 7; 9)$, $B(7; 4; 5)$, $C(8; 2; 2)$.
11. Привести к каноническому виду общие уравнения прямой
$$\begin{cases} -2x - y + 2z + 13 = 0 \\ 3x + y + z + 12 = 0 \end{cases}.$$
12. Найти проекцию точки $M(6; 28; 31)$ на плоскость $-x - 8y - 7z = -105$.
13. Найти угол между прямой $l : \frac{x-2}{1} = \frac{y-3}{2} = \frac{z+1}{-3}$ и плоскостью $\pi : x - y - z = -3$.

Вариант 23.

1. В параллелепипеде $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ $\overline{AB} = \mathbf{a}$, $\overline{AD} = \mathbf{b}$, $\overline{AA_1} = \mathbf{c}$. Выразить через \mathbf{a} , \mathbf{b} , \mathbf{c} вектор $\mathbf{q} = \overline{KM}$, где K – середина ребра $D_1 C_1$, а M делит ребро BC в отношении 3 : 1.
2. Доказать, что векторы $\mathbf{a}(1; 0; -3)$, $\mathbf{b}(-5; 4; 1)$, $\mathbf{c}(2; -1; -1)$ образуют базис. Разложить вектор $\mathbf{d}(3; -3; 0)$ по этим векторам.
3. Найти косинус угла между векторами $\mathbf{a} = -\mathbf{m} - \mathbf{n}$ и $\mathbf{b} = 5\mathbf{m} + \mathbf{n}$ при $|\mathbf{m}| = 1$, $|\mathbf{n}| = 2\sqrt{2}$, $(\widehat{\mathbf{m}, \mathbf{n}}) = \frac{3\pi}{4}$.
4. Найти $\text{pr}_{\mathbf{y}} \mathbf{x}$, при $\mathbf{x} = \mathbf{a}$ и $\mathbf{y} = \mathbf{b} + 3\mathbf{c}$, где $\mathbf{a}(1; -1; -1)$, $\mathbf{b}(7; 5; -23)$, $\mathbf{c}(-4; -1; 6)$.
5. Найти координаты единичного вектора \mathbf{n}_0 , перпендикулярного плоскости $\triangle ABC$, где $A(1; 0; 3)$, $B(0; -5; 4)$, $C(-2; -6; 5)$.
6. Вычислить площадь параллелограмма, построенного на векторах $\mathbf{a} = -\mathbf{m} + 2\mathbf{n}$ и $\mathbf{b} = \mathbf{m} - 3\mathbf{n}$ при $|\mathbf{m}| = 1$, $|\mathbf{n}| = 3$, $(\widehat{\mathbf{m}, \mathbf{n}}) = \frac{\pi}{3}$.
7. Вычислить объем параллелепипеда $A_1 A_2 A_3 A_4 B_1 B_2 B_3 B_4$, площадь грани $A_1 A_2 A_3 A_4$ и высоту, опущенную на эту грань из вершины B_1 . $A_1(0; 1; -9)$, $A_2(-2; 2; -9)$, $A_4(-2; 2; -7)$, $B_1(-7; 4; -10)$.
8. Составить уравнение плоскости, проходящей через точки $A(-9; -5; -4)$, $B(-11; -1; -1)$, $C(-14; 0; 0)$, и найти расстояние от точки $S(-2; 6; -3)$ до этой плоскости.
9. Составить канонические уравнения прямой, проходящей через точку $M(9; -3; -1)$ параллельно плоскости $x + 9y + 4 = 0$ и перпендикулярно прямой $\frac{x+2}{1} = \frac{y-5}{1} = \frac{z+4}{1}$.
10. Составить уравнение прямой AB и найти расстояние от точки C до этой прямой, если $A(9; 2; 0)$, $B(12; 6; 1)$, $C(11; 5; 1)$.
11. Привести к каноническому виду общие уравнения прямой
$$\begin{cases} 9x + 5y - 3z + 25 = 0 \\ -5x - 3y + 2z - 11 = 0 \end{cases}.$$
12. Найти координаты точки M_1 , симметричной точке $M(-6; -5; 8)$ относительно плоскости $-2x - 3y + 3z = 18$.
13. Найти угол между прямой $l : \frac{x}{-2} = \frac{y-5}{2} = \frac{z-7}{3}$ и плоскостью $\pi : -x + 3y + z = -2$.

Вариант 24.

1. В параллелепипеде $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ $\overline{AB} = \mathbf{a}$, $\overline{AD} = \mathbf{b}$, $\overline{AA_1} = \mathbf{c}$. Выразить через \mathbf{a} , \mathbf{b} , \mathbf{c} вектор $\mathbf{q} = \overline{KM}$, где K – середина ребра DD_1 , а M делит ребро AB в отношении $2 : 3$.
2. Доказать, что векторы $\mathbf{a}(3; -2; -4)$, $\mathbf{b}(-3; 3; -1)$, $\mathbf{c}(-5; 5; -1)$ образуют базис. Разложить вектор $\mathbf{d}(1; 0; -6)$ по этим векторам.
3. Найти косинус угла между векторами $\mathbf{a} = -\mathbf{m} - \mathbf{n}$ и $\mathbf{b} = 4\mathbf{m} - \mathbf{n}$ при $|\mathbf{m}| = 2$, $|\mathbf{n}| = \sqrt{3}$, $(\widehat{\mathbf{m}, \mathbf{n}}) = \frac{5\pi}{6}$.
4. Найти $\text{pr}_{\mathbf{y}} \mathbf{x}$, при $\mathbf{x} = 2\mathbf{a} + \mathbf{c}$ и $\mathbf{y} = \mathbf{b}$, где $\mathbf{a}(2; 3; -4)$, $\mathbf{b}(-1; -1; 3)$, $\mathbf{c}(-8; -1; 7)$.
5. Найти координаты единичного вектора \mathbf{n}_0 , перпендикулярного плоскости $\triangle ABC$, где $A(6; 9; 6)$, $B(10; 10; 6)$, $C(1; 8; 7)$.
6. Вычислить площадь треугольника, построенного на векторах $\mathbf{a} = 4\mathbf{m} - 4\mathbf{n}$ и $\mathbf{b} = -2\mathbf{m} + \mathbf{n}$ при $|\mathbf{m}| = 2$, $|\mathbf{n}| = 3$, $(\widehat{\mathbf{m}, \mathbf{n}}) = \frac{5\pi}{6}$.
7. Вычислить объем параллелепипеда $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$, площадь грани $ABCD$ и высоту, опущенную на эту грань из вершины A_1 . $A(-8; -8; 0)$, $B(-3; -3; 1)$, $D(-12; -11; -1)$, $A_1(-14; -15; -2)$.
8. Составить уравнение плоскости, проходящей через точки $A(4; 6; 0)$, $B(9; 7; 1)$, $C(8; 7; 2)$, и найти расстояние от точки $S(-1; 8; -2)$ до этой плоскости.
9. Составить уравнение плоскости π , проходящей через точку $M(-1; 3; -6)$ параллельно прямой $\frac{x-3}{1} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z+1}{2}$ и перпендикулярно плоскости $3x - 2y + 3z = -3$.
10. Составить уравнение прямой AB и найти расстояние от точки C до этой прямой, если $A(5; 5; 2)$, $B(6; 8; 6)$, $C(6; 9; 7)$.
11. Привести к каноническому виду общие уравнения прямой
$$\begin{cases} -3x - y - 12 = 0 \\ x + 3y - z + 1 = 0 \end{cases}.$$
12. Найти координаты точки M_1 , симметричной точке $M(10; -21; 2)$ относительно плоскости $-3x + 8y - z = -15$.
13. Найти угол между прямой $l : \frac{x+6}{-4} = \frac{y+3}{-5} = \frac{z-7}{-4}$ и плоскостью $\pi : x - y + z = 13$.

Вариант 25.

1. В параллелепипеде $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ $\overline{AB} = \mathbf{a}$, $\overline{AD} = \mathbf{b}$, $\overline{AA_1} = \mathbf{c}$. Выразить через \mathbf{a} , \mathbf{b} , \mathbf{c} вектор $\mathbf{q} = \overline{KM}$, где K – середина ребра AD , а M делит ребро $D_1 C_1$ в отношении 1 : 2.
2. Доказать, что векторы $\mathbf{a}(-2; -1; -1)$, $\mathbf{b}(-5; -4; 5)$, $\mathbf{c}(5; 3; 2)$ образуют базис. Разложить вектор $\mathbf{d}(-2; -3; 7)$ по этим векторам.
3. Найти косинус угла между векторами $\mathbf{a} = -2\mathbf{m} - 2\mathbf{n}$ и $\mathbf{b} = 4\mathbf{m} + \mathbf{n}$ при $|\mathbf{m}| = 1$, $|\mathbf{n}| = 2$, $(\widehat{\mathbf{m}, \mathbf{n}}) = \frac{2\pi}{3}$.
4. Найти $\text{pr}_{\mathbf{y}} \mathbf{x}$, при $\mathbf{x} = \mathbf{b}$ и $\mathbf{y} = 3\mathbf{a} + \mathbf{c}$, где $\mathbf{a}(-5; -5; 7)$, $\mathbf{b}(2; 1; -2)$, $\mathbf{c}(10; 13; -18)$.
5. Найти координаты единичного вектора \mathbf{n}_0 , перпендикулярного плоскости $\triangle ABC$, где $A(5; 8; 5)$, $B(2; 9; 6)$, $C(6; 9; 7)$.
6. Вычислить площадь параллелограмма, построенного на векторах $\mathbf{a} = \mathbf{m} - 3\mathbf{n}$ и $\mathbf{b} = -\mathbf{m} + 2\mathbf{n}$ при $|\mathbf{m}| = 1$, $|\mathbf{n}| = 4$, $(\widehat{\mathbf{m}, \mathbf{n}}) = \frac{5\pi}{6}$.
7. Вычислить объем тетраэдра с вершинами в точках A, B, C, D , площадь грани BCD и высоту, опущенную на эту грань из вершины A . $A(0; 11; -4)$, $B(0; 8; -3)$, $C(-3; 2; -2)$, $D(2; 15; -5)$.
8. Задана пирамида $SABC$ координатами вершин $A(2; 7; -7)$, $B(4; 6; -5)$, $C(-1; 6; -6)$, $S(3; 7; 5)$:
а) составить уравнение плоскости ABC ,
б) найти расстояние от вершины S до плоскости ABC .
9. Составить канонические уравнения прямой, проходящей через точку $M(-10; 5; -8)$ параллельно плоскости $x - y = -1$ и перпендикулярно прямой $\frac{x+5}{1} = \frac{y-1}{4} = \frac{z+7}{1}$.
10. Составить уравнение прямой AB и найти расстояние от точки C до этой прямой, если $A(2; 3; 7)$, $B(3; 0; 12)$, $C(4; -2; 15)$.
11. Привести к каноническому виду общие уравнения прямой
$$\begin{cases} 2x + y - z + 1 = 0 \\ 3x - 2y + 3z - 16 = 0 \end{cases}.$$
12. Найти координаты точки M_1 , симметричной точке $M(8; -9; -6)$ относительно плоскости $-7x + 8y + z - 37 = 0$.
13. Найти угол между прямой $l : \frac{x-8}{-2} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z-5}{-1}$ и плоскостью $\pi : -x - y - 4z = -1$.

Вариант 26.

1. В параллелепипеде $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ $\overline{AB} = \mathbf{a}$, $\overline{AD} = \mathbf{b}$, $\overline{AA_1} = \mathbf{c}$. Выразить через \mathbf{a} , \mathbf{b} , \mathbf{c} вектор $\mathbf{q} = \overline{KM}$, где K – середина ребра BC , а M делит ребро AA_1 в отношении $2 : 1$.
2. Доказать, что векторы $\mathbf{a}(4; -2; 3)$, $\mathbf{b}(-1; -3; 3)$, $\mathbf{c}(-1; -5; 5)$ образуют базис. Разложить вектор $\mathbf{d}(-3; -1; 0)$ по этим векторам.
3. Найти косинус угла между векторами $\mathbf{a} = 2\mathbf{m} - 3\mathbf{n}$ и $\mathbf{b} = \mathbf{m} + \mathbf{n}$ при $|\mathbf{m}| = 1$, $|\mathbf{n}| = 2$, $(\widehat{\mathbf{m}, \mathbf{n}}) = \frac{\pi}{3}$.
4. Найти $\text{pr}_{\mathbf{y}} \mathbf{x}$, при $\mathbf{x} = \mathbf{a}$ и $\mathbf{y} = \mathbf{b} + 3\mathbf{c}$, где $\mathbf{a}(-3; 3; -7)$, $\mathbf{b}(1; -8; 1)$, $\mathbf{c}(-1; 1; -2)$.
5. Найти координаты единичного вектора \mathbf{n}_0 , перпендикулярного плоскости $\triangle ABC$, где $A(8; 4; 4)$, $B(10; 1; -4)$, $C(9; 3; 3)$.
6. Вычислить площадь параллелограмма, построенного на векторах $\mathbf{a} = -4\mathbf{m} - 3\mathbf{n}$ и $\mathbf{b} = \mathbf{m} - 2\mathbf{n}$ при $|\mathbf{m}| = 3$, $|\mathbf{n}| = 1$, $(\widehat{\mathbf{m}, \mathbf{n}}) = \frac{\pi}{3}$.
7. Вычислить объем параллелепипеда $A_1 A_2 A_3 A_4 B_1 B_2 B_3 B_4$, площадь грани $A_1 A_2 A_3 A_4$ и высоту, опущенную на эту грань из вершины B_1 . $A_1(-9; 2; 1)$, $A_2(-9; -4; 6)$, $A_4(-8; 9; -5)$, $B_1(-11; -1; 4)$.
8. Составить уравнение плоскости, проходящей через точки $A(7; -1; -4)$, $B(9; -2; -5)$, $C(6; 0; 1)$, и найти расстояние от точки $S(5; -5; -6)$ до этой плоскости.
9. Составить канонические уравнения прямой, проходящей через точку $M(0; 9; -6)$ параллельно плоскости $x - y + z + 4 = 0$ и перпендикулярно прямой $\frac{x+3}{-1} = \frac{y}{2} = \frac{z-1}{0}$.
10. Составить уравнение прямой AB и найти расстояние от точки C до этой прямой, если $A(1; 8; 6)$, $B(-4; 4; 9)$, $C(-5; 3; 10)$.
11. Привести к каноническому виду общие уравнения прямой
$$\begin{cases} x + y - z - 2 = 0 \\ x - 2y + 3z + 14 = 0 \end{cases}.$$
12. Найти координаты точки M_1 , симметричной точке $M(18; 8; -3)$ относительно плоскости $-9x - 5y + 2z = -43$.
13. Найти угол между прямой $l : \frac{x+5}{1} = \frac{y-5}{1} = \frac{z}{-8}$ и плоскостью $\pi : x - y - z = -11$.

Вариант 27.

1. В параллелепипеде $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ $\overline{AB} = \mathbf{a}$, $\overline{AD} = \mathbf{b}$, $\overline{AA_1} = \mathbf{c}$. Выразить через \mathbf{a} , \mathbf{b} , \mathbf{c} вектор $\mathbf{q} = \overline{KM}$, где K – середина ребра $B_1 C_1$, а M делит ребро AA_1 в отношении 1 : 2.
2. Доказать, что векторы $\mathbf{a}(1; 4; 2)$, $\mathbf{b}(1; -1; -3)$, $\mathbf{c}(2; 2; -1)$ образуют базис. Разложить вектор $\mathbf{d}(-5; -9; 0)$ по этим векторам.
3. Найти косинус угла между векторами $\mathbf{a} = -\mathbf{m} - \mathbf{n}$ и $\mathbf{b} = -4\mathbf{m} - \mathbf{n}$ при $|\mathbf{m}| = 2$, $|\mathbf{n}| = 1$, $(\widehat{\mathbf{m}, \mathbf{n}}) = \frac{2\pi}{3}$.
4. Найти $\text{pr}_{\mathbf{y}} \mathbf{x}$, при $\mathbf{x} = \mathbf{b}$ и $\mathbf{y} = 2\mathbf{a} + 2\mathbf{c}$, где $\mathbf{a}(-5; 5; 4)$, $\mathbf{b}(5; -6; -4)$, $\mathbf{c}(7; -4; -5)$.
5. Найти координаты единичного вектора \mathbf{n}_0 , перпендикулярного плоскости $\triangle ABC$, где $A(7; 0; 5)$, $B(4; -2; 4)$, $C(8; 1; 5)$.
6. Вычислить площадь треугольника, построенного на векторах $\mathbf{a} = -3\mathbf{m} + 4\mathbf{n}$ и $\mathbf{b} = 2\mathbf{m} - 2\mathbf{n}$ при $|\mathbf{m}| = 4$, $|\mathbf{n}| = 4$, $(\widehat{\mathbf{m}, \mathbf{n}}) = \frac{2\pi}{3}$.
7. Вычислить объем тетраэдра с вершинами в точках P, Q, R, S , площадь грани PQR и высоту, опущенную на эту грань из вершины S . $P(-6; 5; 7)$, $Q(-8; 6; 5)$, $R(-7; 7; 6)$, $S(-4; 4; 8)$.
8. Составить уравнение плоскости, проходящей через точки $A(2; -2; 2)$, $B(1; -7; 3)$, $C(1; -1; 2)$, и найти расстояние от точки $S(-7; -8; 6)$ до этой плоскости.
9. Составить уравнение плоскости π , проходящей через точку $M(4; -8; -5)$ параллельно прямой $\frac{x+5}{-2} = \frac{y-2}{3} = \frac{z+6}{-1}$ и перпендикулярно плоскости $-x - 2y + z = 5$.
10. Составить уравнение прямой AB и найти расстояние от точки C до этой прямой, если $A(0; 7; 1)$, $B(-3; 9; 2)$, $C(-5; 10; 3)$.
11. Привести к каноническому виду общие уравнения прямой
$$\begin{cases} -x - 3y - z - 11 = 0 \\ 2x + 5y + z + 14 = 0 \end{cases}.$$
12. Найти координаты точки M_1 , симметричной точке $M(20; -7; -16)$ относительно плоскости $8x - 3y - 7z = -12$.
13. Найти угол между прямой $l : \frac{x-1}{-1} = \frac{y+6}{-4} = \frac{z-4}{3}$ и плоскостью $\pi : x - y + z = 1$.

Вариант 28.

1. В параллелепипеде $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ $\overline{AB} = \mathbf{a}$, $\overline{AD} = \mathbf{b}$, $\overline{AA_1} = \mathbf{c}$. Выразить через \mathbf{a} , \mathbf{b} , \mathbf{c} вектор $\mathbf{q} = \overline{KM}$, где K – середина ребра CC_1 , а M делит ребро AD в отношении 3 : 1.
2. Доказать, что векторы $\mathbf{a}(2; 1; 0)$, $\mathbf{b}(3; -4; 3)$, $\mathbf{c}(-1; -2; 1)$ образуют базис. Разложить вектор $\mathbf{d}(6; 9; -4)$ по этим векторам.
3. Найти косинус угла между векторами $\mathbf{a} = \mathbf{m} + \mathbf{n}$ и $\mathbf{b} = 3\mathbf{m} - 3\mathbf{n}$ при $|\mathbf{m}| = 2$, $|\mathbf{n}| = \sqrt{3}$, $(\widehat{\mathbf{m}, \mathbf{n}}) = \frac{5\pi}{6}$.
4. Найти $\text{pr}_y \mathbf{x}$, при $\mathbf{x} = \mathbf{b}$ и $\mathbf{y} = 3\mathbf{a} + \mathbf{c}$, где $\mathbf{a}(-1; -3; 2)$, $\mathbf{b}(1; 1; -1)$, $\mathbf{c}(-2; 14; -3)$.
5. Найти координаты единичного вектора \mathbf{n}_0 , перпендикулярного плоскости $\triangle ABC$, где $A(2; 7; 4)$, $B(-1; 5; 5)$, $C(4; 10; 2)$.
6. Вычислить площадь треугольника, построенного на векторах $\mathbf{a} = \mathbf{m} + \mathbf{n}$ и $\mathbf{b} = 2\mathbf{m} + 4\mathbf{n}$ при $|\mathbf{m}| = 1$, $|\mathbf{n}| = 5$, $(\widehat{\mathbf{m}, \mathbf{n}}) = \frac{3\pi}{4}$.
7. Вычислить объем тетраэдра с вершинами в точках P, Q, R, S , площадь грани PQS и высоту, опущенную на эту грань из вершины R . $P(-2; 7; 1)$, $Q(-9; 4; 6)$, $R(7; 6; 4)$, $S(-6; 7; 0)$.
8. Задана пирамида $SABC$ координатами вершин $A(-8; 4; -5)$, $B(-9; 5; -4)$, $C(-10; 3; -5)$, $S(-8; 1; 6)$:
 а) составить уравнение плоскости ABC ,
 б) найти расстояние от вершины S до плоскости ABC .
9. Составить уравнение плоскости π , проходящей через точку $M(1; 3; -3)$ параллельно прямым $\frac{x+5}{-1} = \frac{y-1}{4} = \frac{z+7}{4}$ и $\frac{x+1}{-1} = \frac{y-5}{3} = \frac{z+8}{5}$.
10. Составить уравнение прямой AB и найти расстояние от точки C до этой прямой, если $A(6; 2; 9)$, $B(10; 3; 4)$, $C(1; 1; 15)$.
11. Привести к каноническому виду общие уравнения прямой
$$\begin{cases} x - y + z + 4 = 0 \\ -6x - 2y + z + 17 = 0 \end{cases}.$$
12. Найти проекцию точки $M(-29; 41; 33)$ на плоскость $-7x + 9y + 8z - 60 = 0$.
13. Найти угол между прямой $l : \frac{x-4}{-2} = \frac{y-7}{5} = \frac{z}{2}$ и плоскостью $\pi : -x + y + z + 9 = 0$.

Вариант 29.

1. В параллелепипеде $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ $\overline{AB} = \mathbf{a}$, $\overline{AD} = \mathbf{b}$, $\overline{AA_1} = \mathbf{c}$. Выразить через \mathbf{a} , \mathbf{b} , \mathbf{c} вектор $\mathbf{q} = \overline{KM}$, где K – середина ребра BC , а M делит ребро $A_1 B_1$ в отношении $2 : 3$.
2. Доказать, что векторы $\mathbf{a}(3; -2; -1)$, $\mathbf{b}(4; -5; -3)$, $\mathbf{c}(5; -2; -1)$ образуют базис. Разложить вектор $\mathbf{d}(-2; 10; 6)$ по этим векторам.
3. Найти косинус угла между векторами $\mathbf{a} = 2\mathbf{m} + \mathbf{n}$ и $\mathbf{b} = -\mathbf{m} - 2\mathbf{n}$ при $|\mathbf{m}| = 2$, $|\mathbf{n}| = \sqrt{3}$, $(\widehat{\mathbf{m}, \mathbf{n}}) = \frac{5\pi}{6}$.
4. Найти $\text{pr}_{\mathbf{y}} \mathbf{x}$, при $\mathbf{x} = \mathbf{a}$ и $\mathbf{y} = \mathbf{b} + 2\mathbf{c}$, где $\mathbf{a}(-2; -3; 2)$, $\mathbf{b}(2; 1; -1)$, $\mathbf{c}(-3; 1; -1)$.
5. Найти координаты единичного вектора \mathbf{n}_0 , перпендикулярного плоскости $\triangle ABC$, где $A(2; 7; 0)$, $B(-7; 8; -1)$, $C(-6; 8; 0)$.
6. Вычислить площадь треугольника, построенного на векторах $\mathbf{a} = \mathbf{m} - \mathbf{n}$ и $\mathbf{b} = -4\mathbf{m} + 2\mathbf{n}$ при $|\mathbf{m}| = 1$, $|\mathbf{n}| = 5$, $(\widehat{\mathbf{m}, \mathbf{n}}) = \frac{\pi}{3}$.
7. Вычислить объем параллелепипеда $ABCDEFGH$, площадь грани $ABCD$ и высоту, опущенную на эту грань из вершины E . $A(1; -5; -7)$, $B(-8; -12; -15)$, $D(-3; -8; -10)$, $E(-1; -7; -10)$.
8. Составить уравнение плоскости, проходящей через точки $A(9; 5; -1)$, $B(4; 8; -4)$, $C(12; 3; 0)$, и найти расстояние от точки $S(-6; -5; 0)$ до этой плоскости.
9. Составить уравнение плоскости π , проходящей через точку $M(-2; -3; -5)$ перпендикулярно плоскостям $6x - y = -4$ и $-7x + y - z + 3 = 0$.
10. Составить уравнение прямой AB и найти расстояние от точки C до этой прямой, если $A(3; 8; 3)$, $B(1; 5; -2)$, $C(0; 3; -5)$.
11. Привести к каноническому виду общие уравнения прямой
$$\begin{cases} -6x + 2y - z + 26 = 0 \\ x + y - 1 = 0 \end{cases}.$$
12. Найти координаты точки M_1 , симметричной точке $M(-1; -17; 0)$ относительно плоскости $x + 5y + 21 = 0$.
13. Найти угол между прямой $l : \frac{x}{-1} = \frac{y+8}{-1} = \frac{z}{2}$ и плоскостью $\pi : 3x + 3y - z - 9 = 0$.

Вариант 30.

1. В параллелепипеде $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ $\overline{AB} = \mathbf{a}$, $\overline{AD} = \mathbf{b}$, $\overline{AA_1} = \mathbf{c}$. Выразить через \mathbf{a} , \mathbf{b} , \mathbf{c} вектор $\mathbf{q} = \overline{KM}$, где K – середина ребра BC , а M делит ребро AA_1 в отношении $2 : 1$.
2. Доказать, что векторы $\mathbf{a}(-2; 2; -1)$, $\mathbf{b}(-3; 3; -1)$, $\mathbf{c}(-2; 6; -3)$ образуют базис. Разложить вектор $\mathbf{d}(2; 6; -5)$ по этим векторам.
3. Найти косинус угла между векторами $\mathbf{a} = \mathbf{m} - \mathbf{n}$ и $\mathbf{b} = 7\mathbf{m} - 8\mathbf{n}$ при $|\mathbf{m}| = 2$, $|\mathbf{n}| = \sqrt{3}$, $(\widehat{\mathbf{m}, \mathbf{n}}) = \frac{\pi}{6}$.
4. Найти $\text{pr}_{\mathbf{y}} \mathbf{x}$, при $\mathbf{x} = \mathbf{a}$ и $\mathbf{y} = \mathbf{b} + \mathbf{c}$, где $\mathbf{a}(1; 1; -1)$, $\mathbf{b}(-6; -7; 1)$, $\mathbf{c}(11; 5; 1)$.
5. Найти координаты единичного вектора \mathbf{n}_0 , перпендикулярного плоскости $\triangle ABC$, где $A(8; 2; 6)$, $B(11; 4; 7)$, $C(9; 3; 7)$.
6. Вычислить площадь треугольника, построенного на векторах $\mathbf{a} = 3\mathbf{m} + 3\mathbf{n}$ и $\mathbf{b} = 4\mathbf{m} + 2\mathbf{n}$ при $|\mathbf{m}| = 3$, $|\mathbf{n}| = 1$, $(\widehat{\mathbf{m}, \mathbf{n}}) = \frac{\pi}{6}$.
7. Вычислить объем параллелепипеда $A_1 A_2 A_3 A_4 B_1 B_2 B_3 B_4$, площадь грани $A_1 A_2 A_3 A_4$ и высоту, опущенную на эту грань из вершины B_1 . $A_1(-1; 1; 9)$, $A_2(-2; 4; 11)$, $A_4(-2; -4; 6)$, $B_1(2; -3; 6)$.
8. Задана пирамида $SABC$ координатами вершин $A(4; 2; -3)$, $B(5; 6; -3)$, $C(7; 5; -2)$, $S(0; -4; -8)$:
а) составить уравнение плоскости ABC ,
б) найти расстояние от вершины S до плоскости ABC .
9. Составить уравнение плоскости π , проходящей через точку $M(5; -4; -8)$ перпендикулярно плоскостям $3x + 2y + z - 7 = 0$ и $-x - y = -3$.
10. Составить уравнение прямой AB и найти расстояние от точки C до этой прямой, если $A(2; 9; 7)$, $B(-1; 2; 3)$, $C(3; 11; 8)$.
11. Привести к каноническому виду общие уравнения прямой
$$\begin{cases} -7x + y + 22 = 0 \\ -6x + y + z + 26 = 0 \end{cases}.$$
12. Найти координаты точки M_1 , симметричной точке $M(-2; 3; -3)$ относительно плоскости $3x - y - 4z = -10$.
13. Найти угол между прямой $l : \frac{x+3}{-2} = \frac{y+1}{-2} = \frac{z-1}{-4}$ и плоскостью $\pi : -x + y - 2z = -3$.

Вариант 31.

1. В параллелепипеде $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ $\overline{AB} = \mathbf{a}$, $\overline{AD} = \mathbf{b}$, $\overline{AA_1} = \mathbf{c}$. Выразить через \mathbf{a} , \mathbf{b} , \mathbf{c} вектор $\mathbf{q} = \overline{KM}$, где K – середина ребра $B_1 C_1$, а M делит ребро DD_1 в отношении 1 : 2.
2. Доказать, что векторы $\mathbf{a}(-3; -5; 4)$, $\mathbf{b}(1; 2; -1)$, $\mathbf{c}(-1; -3; 2)$ образуют базис. Разложить вектор $\mathbf{d}(-6; -3; 5)$ по этим векторам.
3. Найти косинус угла между векторами $\mathbf{a} = -3\mathbf{m} + 4\mathbf{n}$ и $\mathbf{b} = -\mathbf{m} + \mathbf{n}$ при $|\mathbf{m}| = \sqrt{3}$, $|\mathbf{n}| = 2$, $(\widehat{\mathbf{m}, \mathbf{n}}) = \frac{\pi}{6}$.
4. Найти $\text{pr}_{\mathbf{y}} \mathbf{x}$, при $\mathbf{x} = \mathbf{a}$ и $\mathbf{y} = 2\mathbf{b} + \mathbf{c}$, где $\mathbf{a}(3; -4; -2)$, $\mathbf{b}(1; -5; -2)$, $\mathbf{c}(-1; 7; 9)$.
5. Найти координаты единичного вектора \mathbf{n}_0 , перпендикулярного плоскости $\triangle ABC$, где $A(2; 3; 5)$, $B(3; -2; 5)$, $C(1; 11; 6)$.
6. Вычислить площадь треугольника, построенного на векторах $\mathbf{a} = 3\mathbf{m} - \mathbf{n}$ и $\mathbf{b} = 2\mathbf{m} + 3\mathbf{n}$ при $|\mathbf{m}| = 3$, $|\mathbf{n}| = 5$, $(\widehat{\mathbf{m}, \mathbf{n}}) = \frac{3\pi}{4}$.
7. Вычислить объем параллелепипеда $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$, площадь грани $ABCD$ и высоту, опущенную на эту грань из вершины A_1 . $A(-4; 8; 8)$, $B(-2; 16; 5)$, $D(-4; -1; 9)$, $A_1(-1; 9; 5)$.
8. Задана пирамида $SABC$ координатами вершин $A(-2; 8; 7)$, $B(-9; 10; 6)$, $C(-8; 9; 7)$, $S(-6; 0; -2)$:
 - а) составить уравнение плоскости ABC ,
 - б) найти расстояние от вершины S до плоскости ABC .
9. Составить уравнение плоскости π , проходящей через точку $M(-3; 4; 8)$ параллельно прямой $\frac{x+7}{3} = \frac{y-1}{-3} = \frac{z-1}{-1}$ и перпендикулярно плоскости $x + 2y - 7 = 0$.
10. Составить уравнение прямой AB и найти расстояние от точки C до этой прямой, если $A(7; 1; 1)$, $B(8; 0; 4)$, $C(5; 4; -7)$.
11. Привести к каноническому виду общие уравнения прямой
$$\begin{cases} -x - y - 3z + 29 = 0 \\ -x + y + 2z - 24 = 0 \end{cases}.$$
12. Найти координаты точки M_1 , симметричной точке $M(12; -1; 8)$ относительно плоскости $-5x + 2y - 7z = -1$.
13. Найти угол между прямой $l : \frac{x+5}{-2} = \frac{y+8}{2} = \frac{z-4}{1}$ и плоскостью $\pi : -x + 4y + z = -9$.

Вариант 32.

1. В параллелепипеде $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ $\overline{AB} = \mathbf{a}$, $\overline{AD} = \mathbf{b}$, $\overline{AA_1} = \mathbf{c}$. Выразить через \mathbf{a} , \mathbf{b} , \mathbf{c} вектор $\mathbf{q} = \overline{KM}$, где K – середина ребра CC_1 , а M делит ребро $A_1 B_1$ в отношении 3 : 2.
2. Доказать, что векторы $\mathbf{a}(2; -3; 1)$, $\mathbf{b}(1; 2; -2)$, $\mathbf{c}(2; 3; -3)$ образуют базис. Разложить вектор $\mathbf{d}(-5; 9; -3)$ по этим векторам.
3. Найти косинус угла между векторами $\mathbf{a} = 8\mathbf{m} + \mathbf{n}$ и $\mathbf{b} = -2\mathbf{m} - \mathbf{n}$ при $|\mathbf{m}| = 1$, $|\mathbf{n}| = 2\sqrt{3}$, $(\widehat{\mathbf{m}, \mathbf{n}}) = \frac{5\pi}{6}$.
4. Найти $\text{pr}_{\mathbf{y}} \mathbf{x}$, при $\mathbf{x} = \mathbf{b}$ и $\mathbf{y} = \mathbf{a} + \mathbf{c}$, где $\mathbf{a}(1; 3; -8)$, $\mathbf{b}(5; -5; 3)$, $\mathbf{c}(3; -4; 2)$.
5. Найти координаты единичного вектора \mathbf{n}_0 , перпендикулярного плоскости $\triangle ABC$, где $A(4; 2; 9)$, $B(5; 3; 9)$, $C(7; 3; 10)$.
6. Вычислить площадь параллелограмма, построенного на векторах $\mathbf{a} = -4\mathbf{m} - \mathbf{n}$ и $\mathbf{b} = \mathbf{m} + 2\mathbf{n}$ при $|\mathbf{m}| = 4$, $|\mathbf{n}| = 1$, $(\widehat{\mathbf{m}, \mathbf{n}}) = \frac{2\pi}{3}$.
7. Вычислить объем тетраэдра с вершинами в точках A_1, A_2, A_3, A_4 , площадь грани $A_2 A_3 A_4$ и высоту, опущенную на эту грань из вершины A_1 . $A_1(-4; 7; -2)$, $A_2(-3; 9; -3)$, $A_3(-1; 12; -5)$, $A_4(-10; 2; -5)$.
8. Составить уравнение плоскости, проходящей через точки $A(-8; -3; -6)$, $B(-5; -1; -14)$, $C(-7; -2; -11)$, и найти расстояние от точки $S(3; 7; 3)$ до этой плоскости.
9. Составить уравнение плоскости π , проходящей через точку $M(-6; -5; 8)$ параллельно прямым $\frac{x+6}{-3} = \frac{y-2}{3} = \frac{z-5}{-1}$ и $\frac{x-5}{-4} = \frac{y+5}{1} = \frac{z-4}{0}$.
10. Составить уравнение прямой AB и найти расстояние от точки C до этой прямой, если $A(1; 6; 5)$, $B(0; 8; 2)$, $C(3; 1; 13)$.
11. Привести к каноническому виду общие уравнения прямой
$$\begin{cases} 4x + 9y + 3z - 13 = 0 \\ x + 4y + z - 10 = 0 \end{cases}.$$
12. Найти проекцию точки $M(19; -23; -4)$ на плоскость $-4x + 9y - z = 15$.
13. Найти угол между прямой $l : \frac{x-8}{-4} = \frac{y-6}{-1} = \frac{z-8}{-1}$ и плоскостью $\pi : 3x + y + z = 7$.

Вариант 33.

1. В параллелепипеде $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ $\overline{AB} = \mathbf{a}$, $\overline{AD} = \mathbf{b}$, $\overline{AA_1} = \mathbf{c}$. Выразить через \mathbf{a} , \mathbf{b} , \mathbf{c} вектор $\mathbf{q} = \overline{KM}$, где K – середина ребра BC , а M делит ребро $A_1 B_1$ в отношении $1 : 2$.
2. Доказать, что векторы $\mathbf{a}(4; 4; 1)$, $\mathbf{b}(3; 4; 3)$, $\mathbf{c}(2; 3; 4)$ образуют базис. Разложить вектор $\mathbf{d}(-1; -3; -6)$ по этим векторам.
3. Найти косинус угла между векторами $\mathbf{a} = -\mathbf{m} - \mathbf{n}$ и $\mathbf{b} = 3\mathbf{m} - 4\mathbf{n}$ при $|\mathbf{m}| = 2$, $|\mathbf{n}| = 1$, $(\widehat{\mathbf{m}, \mathbf{n}}) = \frac{\pi}{3}$.
4. Найти $\text{pr}_{\mathbf{y}} \mathbf{x}$, при $\mathbf{x} = \mathbf{b}$ и $\mathbf{y} = 3\mathbf{a} + \mathbf{c}$, где $\mathbf{a}(1; 1; 3)$, $\mathbf{b}(-1; -2; -4)$, $\mathbf{c}(-3; -8; -5)$.
5. Найти координаты единичного вектора \mathbf{n}_0 , перпендикулярного плоскости $\triangle ABC$, где $A(8; 4; 4)$, $B(7; 5; 4)$, $C(9; 0; 3)$.
6. Вычислить площадь треугольника, построенного на векторах $\mathbf{a} = 4\mathbf{m} + 4\mathbf{n}$ и $\mathbf{b} = -\mathbf{m} + 3\mathbf{n}$ при $|\mathbf{m}| = 5$, $|\mathbf{n}| = 3$, $(\widehat{\mathbf{m}, \mathbf{n}}) = \frac{\pi}{4}$.
7. Вычислить объем параллелепипеда $ABCDEFGH$, площадь грани $ABCD$ и высоту, опущенную на эту грань из вершины E . $A(0; 3; 6)$, $B(-3; 1; 9)$, $D(-2; -2; 6)$, $E(0; 6; 8)$.
8. Составить уравнение плоскости, проходящей через точки $A(10; -6; 7)$, $B(11; -8; 8)$, $C(11; -7; 3)$, и найти расстояние от точки $S(2; -6; 4)$ до этой плоскости.
9. Составить уравнение плоскости π , проходящей через точку $M(5; 5; 7)$ параллельно прямой $\frac{x+4}{1} = \frac{y-2}{3} = \frac{z+1}{-1}$ и перпендикулярно плоскости $2x + y - z = 4$.
10. Составить уравнение прямой AB и найти расстояние от точки C до этой прямой, если $A(1; 2; 4)$, $B(5; 1; -2)$, $C(-2; 3; 9)$.
11. Привести к каноническому виду общие уравнения прямой
$$\begin{cases} -x - y + 2z + 1 = 0 \\ 3x + 2y + 3z - 11 = 0 \end{cases}.$$
12. Найти координаты точки M_1 , симметричной точке $M(4; -4; -2)$ относительно плоскости $x - z = 3$.
13. Найти угол между прямой $l : \frac{x-4}{-1} = \frac{y+2}{-1} = \frac{z+6}{1}$ и плоскостью $\pi : -4x + 5y + 3z = 13$.

Вариант 34.

1. В параллелепипеде $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ $\overline{AB} = \mathbf{a}$, $\overline{AD} = \mathbf{b}$, $\overline{AA_1} = \mathbf{c}$. Выразить через \mathbf{a} , \mathbf{b} , \mathbf{c} вектор $\mathbf{q} = \overline{KM}$, где K – середина ребра $D_1 C_1$, а M делит ребро BB_1 в отношении 2 : 1.
2. Доказать, что векторы $\mathbf{a}(-2; 3; -2)$, $\mathbf{b}(1; -2; 2)$, $\mathbf{c}(-3; 2; 1)$ образуют базис. Разложить вектор $\mathbf{d}(-5; 2; 4)$ по этим векторам.
3. Найти косинус угла между векторами $\mathbf{a} = -\mathbf{m} + \mathbf{n}$ и $\mathbf{b} = \mathbf{m} - 2\mathbf{n}$ при $|\mathbf{m}| = 3$, $|\mathbf{n}| = 2\sqrt{3}$, $(\widehat{\mathbf{m}, \mathbf{n}}) = \frac{\pi}{6}$.
4. Найти $\text{pr}_{\mathbf{y}} \mathbf{x}$, при $\mathbf{x} = \mathbf{b}$ и $\mathbf{y} = \mathbf{a} + 3\mathbf{c}$, где $\mathbf{a}(-6; 1; 1)$, $\mathbf{b}(1; -2; 2)$, $\mathbf{c}(0; -2; 1)$.
5. Найти координаты единичного вектора \mathbf{n}_0 , перпендикулярного плоскости $\triangle ABC$, где $A(7; 1; 8)$, $B(8; 0; 6)$, $C(8; -4; 7)$.
6. Вычислить площадь параллелограмма, построенного на векторах $\mathbf{a} = \mathbf{m} - 3\mathbf{n}$ и $\mathbf{b} = \mathbf{m} + 3\mathbf{n}$ при $|\mathbf{m}| = 2$, $|\mathbf{n}| = 3$, $(\widehat{\mathbf{m}, \mathbf{n}}) = \frac{\pi}{3}$.
7. Вычислить объем тетраэдра с вершинами в точках A, B, C, D , площадь грани ABC и высоту, опущенную на эту грань из вершины D . $A(0; -2; 0)$, $B(1; 6; -9)$, $C(3; -5; 1)$, $D(2; -4; 1)$.
8. Задана пирамида $SABC$ координатами вершин $A(-7; -6; 0)$, $B(-5; -7; -3)$, $C(-12; -3; 7)$, $S(-2; -5; 6)$:
 - а) составить уравнение плоскости ABC ,
 - б) найти расстояние от вершины S до плоскости ABC .
9. Составить канонические уравнения прямой, проходящей через точку $M(-1; 0; -9)$ параллельно плоскости $x - y = 0$ и перпендикулярно прямой $\frac{x-4}{-2} = \frac{y+8}{8} = \frac{z}{1}$.
10. Составить уравнение прямой AB и найти расстояние от точки C до этой прямой, если $A(2; 5; 8)$, $B(5; 1; 7)$, $C(3; 4; 8)$.
11. Привести к каноническому виду общие уравнения прямой
$$\begin{cases} x + y - 2z + 2 = 0 \\ -x + 2y + 3z + 23 = 0 \end{cases}.$$
12. Найти координаты точки M_1 , симметричной точке $M(12; 16; -16)$ относительно плоскости $3x + 5y - 6z = 37$.
13. Найти угол между прямой $l : \frac{x-2}{2} = \frac{y-2}{-2} = \frac{z-4}{1}$ и плоскостью $\pi : -2x + 2y - 3z - 4 = 0$.

Вариант 35.

1. В параллелепипеде $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ $\overline{AB} = \mathbf{a}$, $\overline{AD} = \mathbf{b}$, $\overline{AA_1} = \mathbf{c}$. Выразить через \mathbf{a} , \mathbf{b} , \mathbf{c} вектор $\mathbf{q} = \overline{KM}$, где K – середина ребра DD_1 , а M делит ребро AB в отношении $2 : 3$.
2. Доказать, что векторы $\mathbf{a}(2; 1; 0)$, $\mathbf{b}(3; 2; -1)$, $\mathbf{c}(-1; 0; 2)$ образуют базис. Разложить вектор $\mathbf{d}(-4; -1; 7)$ по этим векторам.
3. Найти косинус угла между векторами $\mathbf{a} = -\mathbf{m} + \mathbf{n}$ и $\mathbf{b} = -3\mathbf{m} + 4\mathbf{n}$ при $|\mathbf{m}| = 2$, $|\mathbf{n}| = 1$, $(\widehat{\mathbf{m}, \mathbf{n}}) = \frac{\pi}{3}$.
4. Найти $\text{pr}_{\mathbf{y}} \mathbf{x}$, при $\mathbf{x} = \mathbf{b}$ и $\mathbf{y} = 2\mathbf{a} + 2\mathbf{c}$, где $\mathbf{a}(-7; -3; 4)$, $\mathbf{b}(4; 1; -2)$, $\mathbf{c}(6; 3; -2)$.
5. Найти координаты единичного вектора \mathbf{n}_0 , перпендикулярного плоскости $\triangle ABC$, где $A(0; 1; 0)$, $B(3; 9; 2)$, $C(1; 4; 1)$.
6. Вычислить площадь параллелограмма, построенного на векторах $\mathbf{a} = 4\mathbf{m} + 4\mathbf{n}$ и $\mathbf{b} = -3\mathbf{m} - 2\mathbf{n}$ при $|\mathbf{m}| = 2$, $|\mathbf{n}| = 2$, $(\widehat{\mathbf{m}, \mathbf{n}}) = \frac{\pi}{3}$.
7. Вычислить объем тетраэдра с вершинами в точках P, Q, R, S , площадь грани QRS и высоту, опущенную на эту грань из вершины P . $P(-7; 2; 3)$, $Q(0; 6; 2)$, $R(-7; 5; 6)$, $S(-6; 3; 3)$.
8. Задана пирамида $SABC$ координатами вершин $A(5; 10; -1)$, $B(10; 9; 4)$, $C(1; 11; -4)$, $S(-3; 2; 0)$:
а) составить уравнение плоскости ABC ,
б) найти расстояние от вершины S до плоскости ABC .
9. Составить канонические уравнения прямой, проходящей через точку $M(0; -1; 1)$ параллельно плоскости $4x + 2y - z = 9$ и перпендикулярно прямой $\frac{x}{3} = \frac{y}{1} = \frac{z+8}{0}$.
10. Составить уравнение прямой AB и найти расстояние от точки C до этой прямой, если $A(0; 6; 3)$, $B(-3; -1; 7)$, $C(1; 8; 2)$.
11. Привести к каноническому виду общие уравнения прямой
$$\begin{cases} -3x - y - z + 19 = 0 \\ -2x + 2y + z + 5 = 0 \end{cases}$$
.
12. Найти координаты точки M_1 , симметричной точке $M(0; -5; 9)$ относительно плоскости $x - 6y + 5z + 18 = 0$.
13. Найти угол между прямой $l : \frac{x-6}{1} = \frac{y}{-1} = \frac{z-4}{2}$ и плоскостью $\pi : -5x - y - 2z + 2 = 0$.

Вариант 36.

1. В параллелепипеде $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ $\overline{AB} = \mathbf{a}$, $\overline{AD} = \mathbf{b}$, $\overline{AA_1} = \mathbf{c}$. Выразить через \mathbf{a} , \mathbf{b} , \mathbf{c} вектор $\mathbf{q} = \overline{KM}$, где K – середина ребра BB_1 , а M делит ребро $A_1 D_1$ в отношении 1 : 2.
2. Доказать, что векторы $\mathbf{a}(0; -2; 3)$, $\mathbf{b}(-2; -3; 2)$, $\mathbf{c}(1; 4; -6)$ образуют базис. Разложить вектор $\mathbf{d}(-6; -6; -1)$ по этим векторам.
3. Найти косинус угла между векторами $\mathbf{a} = \mathbf{m} + \mathbf{n}$ и $\mathbf{b} = 2\mathbf{m} + 4\mathbf{n}$ при $|\mathbf{m}| = 2$, $|\mathbf{n}| = \sqrt{2}$, $(\widehat{\mathbf{m}, \mathbf{n}}) = \frac{3\pi}{4}$.
4. Найти $\text{pr}_{\mathbf{y}} \mathbf{x}$, при $\mathbf{x} = \mathbf{b}$ и $\mathbf{y} = 3\mathbf{a} + \mathbf{c}$, где $\mathbf{a}(1; 1; -1)$, $\mathbf{b}(-3; 1; 4)$, $\mathbf{c}(-4; -9; 8)$.
5. Найти координаты единичного вектора \mathbf{n}_0 , перпендикулярного плоскости $\triangle ABC$, где $A(4; 7; 2)$, $B(11; 8; 2)$, $C(-1; 6; 3)$.
6. Вычислить площадь треугольника, построенного на векторах $\mathbf{a} = -2\mathbf{m} - \mathbf{n}$ и $\mathbf{b} = -4\mathbf{m} - 4\mathbf{n}$ при $|\mathbf{m}| = 3$, $|\mathbf{n}| = 1$, $(\widehat{\mathbf{m}, \mathbf{n}}) = \frac{5\pi}{6}$.
7. Вычислить объем тетраэдра с вершинами в точках P, Q, R, S , площадь грани PQR и высоту, опущенную на эту грань из вершины S . $P(-8; -5; -6)$, $Q(-15; -6; -6)$, $R(-13; -3; -10)$, $S(-18; -2; -13)$.
8. Составить уравнение плоскости, проходящей через точки $A(-1; -3; -5)$, $B(0; -2; -5)$, $C(-3; -6; -4)$, и найти расстояние от точки $S(-3; -6; 7)$ до этой плоскости.
9. Составить уравнение плоскости π , проходящей через точку $M(-9; 2; 0)$ перпендикулярно плоскостям $-2x + 2y + 5z = -4$ и $-x - y - 2z = 0$.
10. Составить уравнение прямой AB и найти расстояние от точки C до этой прямой, если $A(6; 5; 0)$, $B(8; -4; 7)$, $C(5; 10; -4)$.
11. Привести к каноническому виду общие уравнения прямой
$$\begin{cases} -6x + y + 8 = 0 \\ 7x - 2y + z - 13 = 0 \end{cases}.$$
12. Найти проекцию точки $M(14; -11; -23)$ на плоскость $-2x + 5y + 5z + 36 = 0$.
13. Найти угол между прямой $l : \frac{x+1}{-3} = \frac{y+3}{1} = \frac{z+3}{7}$ и плоскостью $\pi : -x - y + z + 5 = 0$.

Вариант 37.

1. В параллелепипеде $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ $\overline{AB} = \mathbf{a}$, $\overline{AD} = \mathbf{b}$, $\overline{AA_1} = \mathbf{c}$. Выразить через \mathbf{a} , \mathbf{b} , \mathbf{c} вектор $\mathbf{q} = \overline{KM}$, где K – середина ребра CC_1 , а M делит ребро $A_1 D_1$ в отношении 3 : 2.
2. Доказать, что векторы $\mathbf{a}(2; 1; -4)$, $\mathbf{b}(-2; 3; 6)$, $\mathbf{c}(-1; -3; 1)$ образуют базис. Разложить вектор $\mathbf{d}(4; 3; -8)$ по этим векторам.
3. Найти косинус угла между векторами $\mathbf{a} = 2\mathbf{m} - 2\mathbf{n}$ и $\mathbf{b} = -\mathbf{m} - 2\mathbf{n}$ при $|\mathbf{m}| = 2$, $|\mathbf{n}| = 1$, $(\widehat{\mathbf{m}, \mathbf{n}}) = \frac{\pi}{3}$.
4. Найти $\text{pr}_{\mathbf{y}} \mathbf{x}$, при $\mathbf{x} = \mathbf{a} + 2\mathbf{c}$ и $\mathbf{y} = \mathbf{b}$, где $\mathbf{a}(12; 11; -11)$, $\mathbf{b}(3; 1; -1)$, $\mathbf{c}(-4; -3; 4)$.
5. Найти координаты единичного вектора \mathbf{n}_0 , перпендикулярного плоскости $\triangle ABC$, где $A(7; 1; 8)$, $B(0; -1; 13)$, $C(4; 0; 10)$.
6. Вычислить площадь треугольника, построенного на векторах $\mathbf{a} = \mathbf{m} + 2\mathbf{n}$ и $\mathbf{b} = -2\mathbf{m} + 3\mathbf{n}$ при $|\mathbf{m}| = 5$, $|\mathbf{n}| = 5$, $(\widehat{\mathbf{m}, \mathbf{n}}) = \frac{\pi}{6}$.
7. Вычислить объем тетраэдра с вершинами в точках A, B, C, D , площадь грани ACD и высоту, опущенную на эту грань из вершины B . $A(4; -3; 7)$, $B(6; -6; 8)$, $C(9; -6; 11)$, $D(6; -7; 8)$.
8. Составить уравнение плоскости, проходящей через точки $A(-9; -10; 9)$, $B(-8; -9; 9)$, $C(-2; -13; 10)$, и найти расстояние от точки $S(-4; 7; 5)$ до этой плоскости.
9. Составить уравнение плоскости π , проходящей через точку $M(0; -10; -2)$ параллельно прямой $\frac{x-2}{-3} = \frac{y-1}{1} = \frac{z}{0}$ и перпендикулярно плоскости $8x - 2y + z + 2 = 0$.
10. Составить уравнение прямой AB и найти расстояние от точки C до этой прямой, если $A(3; 6; 0)$, $B(7; 5; 2)$, $C(8; 5; 3)$.
11. Привести к каноническому виду общие уравнения прямой
$$\begin{cases} 7x - y + 2z + 7 = 0 \\ 6x - y + z + 1 = 0 \end{cases}.$$
12. Найти координаты точки M_1 , симметричной точке $M(-20; 22; 18)$ относительно плоскости $-7x + 9y + 6z = 31$.
13. Найти угол между прямой $l : \frac{x+1}{1} = \frac{y+7}{1} = \frac{z+7}{1}$ и плоскостью $\pi : 4x - 4y - 3z = 11$.

Вариант 38.

1. В параллелепипеде $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ $\overline{AB} = \mathbf{a}$, $\overline{AD} = \mathbf{b}$, $\overline{AA_1} = \mathbf{c}$. Выразить через \mathbf{a} , \mathbf{b} , \mathbf{c} вектор $\mathbf{q} = \overline{KM}$, где K – середина ребра AB , а M делит ребро DD_1 в отношении $2 : 3$.
2. Доказать, что векторы $\mathbf{a}(-1; -2; 1)$, $\mathbf{b}(1; 1; 2)$, $\mathbf{c}(2; 1; 2)$ образуют базис. Разложить вектор $\mathbf{d}(-1; -3; 4)$ по этим векторам.
3. Найти косинус угла между векторами $\mathbf{a} = -2\mathbf{m} - \mathbf{n}$ и $\mathbf{b} = -4\mathbf{m} - \mathbf{n}$ при $|\mathbf{m}| = 1$, $|\mathbf{n}| = 2$, $(\widehat{\mathbf{m}, \mathbf{n}}) = \frac{2\pi}{3}$.
4. Найти $\text{pr}_{\mathbf{y}} \mathbf{x}$, при $\mathbf{x} = 3\mathbf{b} + \mathbf{c}$ и $\mathbf{y} = \mathbf{a}$, где $\mathbf{a}(4; 2; 3)$, $\mathbf{b}(3; -2; 1)$, $\mathbf{c}(-9; 8; -8)$.
5. Найти координаты единичного вектора \mathbf{n}_0 , перпендикулярного плоскости $\triangle ABC$, где $A(1; 4; 1)$, $B(0; 5; -2)$, $C(-3; 5; -1)$.
6. Вычислить площадь параллелограмма, построенного на векторах $\mathbf{a} = -2\mathbf{m} - 3\mathbf{n}$ и $\mathbf{b} = \mathbf{m} - \mathbf{n}$ при $|\mathbf{m}| = 4$, $|\mathbf{n}| = 2$, $(\widehat{\mathbf{m}, \mathbf{n}}) = \frac{3\pi}{4}$.
7. Вычислить объем тетраэдра с вершинами в точках A_1, A_2, A_3, A_4 , площадь грани $A_1 A_2 A_3$ и высоту, опущенную на эту грань из вершины A_4 . $A_1(2; 3; 0)$, $A_2(4; 8; -1)$, $A_3(2; 12; 1)$, $A_4(7; 8; -3)$.
8. Составить уравнение плоскости, проходящей через точки $A(-1; 1; -4)$, $B(2; 9; -2)$, $C(0; 2; -3)$, и найти расстояние от точки $S(3; -3; -5)$ до этой плоскости.
9. Составить уравнение плоскости π , проходящей через точку $M(-2; -1; -3)$ перпендикулярно плоскостям $7x + 2y - z = 4$ и $-8x - y + z = -3$.
10. Составить уравнение прямой AB и найти расстояние от точки C до этой прямой, если $A(0; 6; 7)$, $B(1; 1; 0)$, $C(1; 2; 1)$.
11. Привести к каноническому виду общие уравнения прямой
$$\begin{cases} 2x + y - 13 = 0 \\ 3x - y + z - 8 = 0 \end{cases}.$$
12. Найти координаты точки M_1 , симметричной точке $M(0; -1; 5)$ относительно плоскости $-3x + y - 4z - 18 = 0$.
13. Найти угол между прямой $l : \frac{x}{2} = \frac{y}{-3} = \frac{z+8}{-2}$ и плоскостью $\pi : -3x + y + z = 0$.

Вариант 39.

1. В параллелепипеде $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ $\overline{AB} = \mathbf{a}$, $\overline{AD} = \mathbf{b}$, $\overline{AA_1} = \mathbf{c}$. Выразить через \mathbf{a} , \mathbf{b} , \mathbf{c} вектор $\mathbf{q} = \overline{KM}$, где K – середина ребра $D_1 C_1$, а M делит ребро BC в отношении 1 : 2.
2. Доказать, что векторы $\mathbf{a}(4; -3; -3)$, $\mathbf{b}(3; -1; -2)$, $\mathbf{c}(4; -3; -2)$ образуют базис. Разложить вектор $\mathbf{d}(10; -10; -7)$ по этим векторам.
3. Найти косинус угла между векторами $\mathbf{a} = 3\mathbf{m} + 5\mathbf{n}$ и $\mathbf{b} = -\mathbf{m} - 2\mathbf{n}$ при $|\mathbf{m}| = 2\sqrt{3}$, $|\mathbf{n}| = 2$, $(\widehat{\mathbf{m}, \mathbf{n}}) = \frac{5\pi}{6}$.
4. Найти $\text{pr}_{\mathbf{y}} \mathbf{x}$, при $\mathbf{x} = \mathbf{a}$ и $\mathbf{y} = \mathbf{b} + 3\mathbf{c}$, где $\mathbf{a}(2; 1; -2)$, $\mathbf{b}(14; 14; -5)$, $\mathbf{c}(-5; -3; 3)$.
5. Найти координаты единичного вектора \mathbf{n}_0 , перпендикулярного плоскости $\triangle ABC$, где $A(4; 2; 1)$, $B(-1; 3; 1)$, $C(-5; 4; 2)$.
6. Вычислить площадь параллелограмма, построенного на векторах $\mathbf{a} = -4\mathbf{m} - 3\mathbf{n}$ и $\mathbf{b} = \mathbf{m} - 2\mathbf{n}$ при $|\mathbf{m}| = 4$, $|\mathbf{n}| = 4$, $(\widehat{\mathbf{m}, \mathbf{n}}) = \frac{2\pi}{3}$.
7. Вычислить объем тетраэдра с вершинами в точках A_1, A_2, A_3, A_4 , площадь грани $A_1 A_2 A_3$ и высоту, опущенную на эту грань из вершины A_4 . $A_1(5; 0; -5)$, $A_2(-4; 3; -4)$, $A_3(11; -3; -7)$, $A_4(4; 4; -2)$.
8. Задана пирамида $SABC$ координатами вершин $A(5; 1; 9)$, $B(6; 2; 5)$, $C(6; 3; 10)$, $S(-5; 3; 0)$:
а) составить уравнение плоскости ABC ,
б) найти расстояние от вершины S до плоскости ABC .
9. Составить уравнение плоскости π , проходящей через точку $M(8; -7; -6)$ перпендикулярно плоскостям $x + 2y - 3z - 8 = 0$ и $3x + y - z = 8$.
10. Составить уравнение прямой AB и найти расстояние от точки C до этой прямой, если $A(5; 4; 7)$, $B(0; 3; 10)$, $C(1; 3; 9)$.
11. Привести к каноническому виду общие уравнения прямой

$$\begin{cases} x + 7y - z - 11 = 0 \\ -x - 10y + 2z + 10 = 0 \end{cases}.$$
12. Найти координаты точки M_1 , симметричной точке $M(1; -6; 1)$ относительно плоскости $-4x + 5y - z + 14 = 0$.
13. Найти угол между прямой $l : \frac{x+1}{4} = \frac{y+2}{3} = \frac{z}{-1}$ и плоскостью $\pi : -x - y + 2z - 1 = 0$.